1. Jeux simultanés à information complète

Dans cette classe de jeux, on adopte l'hypothèse selon laquelle chaque joueur dispose de toute l'information se rapportant au jeu, à savoir le nombre de joueurs, l'ensemble des stratégies possibles de chaque joueur et les fonctions de paiement de chaque joueur. Les jeux de cette forme sont des jeux à information complète.

• La forme normale d'un jeu

On appelle un jeu sous forme normale un jeu G ayant les caractéristiques suivantes :

- Il s'agit d'un jeu à information complète.
- Il s'agit d'un jeu simultané (statique) où chaque joueur choisit une stratégie indépendamment du choix de l'autre joueur et le jeu ne se répète pas.
- Les joueurs sont rationnels et leur objectif est la maximisation de leur paiement.

Un jeu sous forme normale, noté $G = [n; \{S_i\}; \{u_i\}]$, est la donnée de trois éléments :

- L'ensemble des n joueurs concernés.
- Les ensembles S_i des stratégies possibles de chacun des n joueurs.
- Le paiement (ou utilité) obtenu par le joueur i lorsque les n joueurs choisissent l'issue $(s_1, s_2, ...s_n)$ est $u_i(s_i, s_{-i})$ où s_{-i} désigne le sous-ensemble des stratégies choisies par les joueurs autres que le joueur i.

Exemple 1 :

Considérons le cas classique du dilemme du prisonnier. N'ayant pas les preuves suffisantes pour leur inculpation, le juge, convaincu de leur culpabilité, tente d'obtenir des confessions des deux prisonniers et à chacun d'eux, il propose ce qui suit :

Si un des prisonniers est le seul à avouer, alors sa peine sera allégée et égale à1 an et l'autre prisonnier aura une peine de 8 ans.

Si les deux prisonniers avouent, alors chacun d'eux aura une peine de 5 ans.

Si personne n'avoue, une peine de 2 ans sera tout de même appliquée pour un délit plus faible (par exemple la détention illégale d'armes).

Ce jeu peut être représenté par la matrice des paiements suivante :

		Prisonnier 2	
		Ne pas avouer	Avouer
Prisonnier 1	Ne pas avouer	-2 , -2	-8 , -1
	Avouer	-1 , -8	-5 , -5

•L'équilibre en stratégies dominantes

La solution d'un jeu est obtenue en se basant sur l'idée qu'un joueur *rationnel* ne choisit jamais une stratégie strictement dominée.

Une stratégie s_i est une stratégie strictement dominée pour le joueur i dans le jeu si pour tout $s_i' \neq s_i$ on a $u_i(s_i, s_{-i}) < u_i(s_i', s_{-i})$ pour tout s_{-i}

Lorsque c'est possible, l'équilibre (ou solution) de ce jeu peut être obtenu par élimination successive des stratégies strictement dominées.

Exemple 2 :

Considérons la forme normale d'un jeu représentée par la matrice des paiements suivante :

		Joueur 2		
		B_1	B_2	B_3
Joueur 1	A_1	10 , 10	4 , 9	4 , 11
	A_2	5 , 6	8 , 3	3 , 4
	A_3	4 , 0	8 , 1	5 , 3

La stratégie B_3 procure au joueur 2 un plus grand paiement que la stratégie B_2 et ce, quelle que soit la stratégie choisie par le joueur 1. On dit dans ce cas que la stratégie B_2 est strictement dominée par la stratégie B_3 . Un joueur rationnel ne choisira jamais de jouer la stratégie B_2 . La stratégie B_2 peut donc être éliminée .

Notons que c'est le joueur 2 qui a éliminé la stratégie B_2 . Mais comme le joueur 1 sait que le joueur 2 est rationnel, il sait que le joueur 2 a éliminé la stratégie B_2 .

Cette connaissance commune, permet de passer à la forme normale représentée dans la figure suivante :

Joueur 2

		B_1	B_3
Joueur 1	A_1	10 , 10	4 , 11
	A_2	5 , 6	3 , 4
	A_3	4 , 0	5 , 3

Le joueur 1 ne peut choisir la stratégie A_2 car celle-ci est strictement dominée par la stratégie A_1 , le jeu se simplifie encore comme suit :

Joueur 2

		B_1	B_3
Joueur 1	A_1	10 , 10	4 , 11
	A_3	4 , 0	5 , 3

Pour le joueur 2, la stratégie B_1 est strictement dominée par la stratégie B_3 . Sachant que la stratégie B_1 est éliminée par le joueur 2, la meilleure réponse du joueur 1 est de choisir la stratégie A_3 .

L'issue (A_3, B_3) est appelée équilibre en stratégies strictement dominantes, aucun joueur n'est incité à dévier de façon unilatérale vers une autre stratégie.

Notons que l'équilibre du jeu n'est pas nécessairement un équilibre de Pareto.

Le modèle du dilemme du prisonnier est un exemple où la solution du jeu s'obtient par élimination successive des stratégies strictement dominées, l'issue (avouer, avouer) est un équilibre en stratégies strictement dominantes et chaque prisonnier se voit infliger une peine de 5 ans de prison, on remarque que c'est la solution la plus mauvaise collectivement.

Exemple 3 : Une version du modèle du dilemme du prisonnier dans le domaine social, le problème du *free rider* :

Deux individus faisant partie de la même équipe, le résultat final obtenu par l'équipe dépend de la contribution de chaque joueur qui peut soit travailler ($s_i = 1$) soit tricher ($s_i = 0$). Le produit total du groupe est égal à $4(s_1 + s_2)$ et est partagé de façon égale entre les 2 joueurs. Chaque membre du groupe supporte un coût de 3 lorsqu'il fournit l'effort de travailler et de 0 lorsqu'il triche.

Par exemple si 1 triche ($s_1 = 0$) et 2 travaille ($s_2 = 1$), l'équipe gagne $4(0 + 1) = 4$, soit un gain de 2 pour chaque joueur, c'est à dire un bénéfice de $2 - 0 = 2$ pour le joueur 1 et un bénéfice de $2 - 3 = -1$ pour le joueur 2.

La matrice des paiements de ce jeu se présente ainsi :

Joueur 2

		Travailler	Tricher
Joueur 1	Travailler	1 , 1	-1 , 2
	Tricher	2 , -1	0 , 0

Pour chacun des deux joueurs, la stratégie "travailler" est strictement dominée par la stratégie "tricher".

Le profil de stratégie (travailler, travailler) domine, au sens de Pareto, le profil de stratégies (tricher, tricher). Mais, il ne constitue pas l'équilibre du jeu.

Cet exemple fait ressortir le coût social qui pourrait apparaître lorsque la rémunération est faiblement reliée à l'effort. Relevons que cet équilibre peut se modifier si par exemple, le coût de l'effort était moindre.

Exemple 4 : L'enchère au second prix

L'enchère au second prix, appelée également enchère de Vickrey, est un exemple célèbre de jeu dont l'issue est un équilibre en stratégies (non strictement) dominantes. Dans l'enchère au second prix, les offres sont soumises sous pli cacheté et l'objet est attribué à l'enchérisseur qui propose l'offre la plus élevée. Le prix à payer est égal à la deuxième offre la plus élevée. Vickrey (1961) a montré que l'enchère au second prix implique que la stratégie dominante des acheteurs est l'annonce de leur vraie évaluation subjective.

L'enchère au second prix est de ce fait un mécanisme direct révélateur. Le vendeur , par exemple l'état, délègue aux acheteurs l'expertise du bien et est sûr que le prix final n'est pas bradé, d'où de grosses économies.

Pour montrer cela, considérons l'acheteur potentiel i ayant une évaluation subjective v_i pour l'objet qui est donc sa disposition à payer et annonçant une enchère b_i .

Appelons y le maximum des enchères annoncées par les acheteurs potentiels autres que i , et notons que l'acheteur réalise une bonne affaire si $v_i - y \geq 0$.

L'ensemble des différentes situation est résumé dans le tableau ci-dessous :

	$b_i = v_i$	$b_i > v_i$	$b_i < v_i$
$y > v_i$	perd l'enchère, $v_i - y = 0$	perd l'enchère si $v_i < b_i < y$ et $v_i - y = 0$ gagne l'enchère si $v_i < y < b_i$ mais $v_i - y < 0$	perd l'enchère, $v_i - y = 0$
$y < v_i$	gagne l'enchère, $v_i - y \geq 0$	gagne l'enchère, $v_i - y \geq 0$	gagne l'enchère si $y < b_i < v_i$ et $v_i - y \geq 0$ perd l'enchère si $b_i < y < v_i$ et $v_i - y = 0$

Dans tous les cas la stratégie $b_i = v_i$ domine les autres stratégies.

• L'équilibre de Nash en stratégies pures

L'exemple du jeu sous forme normale suivant nous indique qu'il n'existe pas toujours d'équilibre en stratégies strictement dominantes :

Joueur 2

		B_1	B_2	B_3
Joueur 1	A_1	6 , 7	9 , 6	0 , 6
	A_2	5 , 2	8 , 2	4 , 5
	A_3	7 , 7	7 , 8	0 , 9

Pour caractériser l'issue de ce jeu, un nouveau concept d'équilibre a été proposé en 1950 par J.F. Nash :

L'issue en stratégies pures $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ est un équilibre de Nash si pour tout joueur i et pour toute stratégie s_i , nous avons : $u_i(s_i, s_{-i}^*) \leq u_i(s_i^*, s_{-i}^*)$

La différence entre l'équilibre en stratégies dominantes et l'équilibre de Nash est donc la suivante : dans l'équilibre en stratégies dominantes, le choix du joueur i est optimal pour tout choix du joueur j alors que dans l'équilibre de Nash, le choix de i est optimal pour (seulement) tout choix *optimal* de j.

Pour trouver l'équilibre de Nash, il faut déterminer pour chacun des deux joueurs sa meilleure réponse à chaque stratégie de l'autre joueur. Dans l'exemple ci dessus, pour le joueur 1, l'action A_3 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_1 , l'action A_1 est sa meilleure réponse si le joueur 2 choisit B_2... Notons $b_i()$ la fonction de meilleure réponse du joueur i, on aura alors :$A_3 = b_1(B_1)$, $A_1 = b_1(B_2)$, $A_2 = b_1(B_3)$. Et de même : $B_1 = b_2(A_1)$, $B_3 = b_2(A_2)$, $B_3 = b_2(A_3)$

Comme $A_2 = b_1(B_3)$ et $B_3 = b_2(A_2)$, (A_2, B_3) est la solution du jeu appelée équilibre de Nash.

Une remarque :Si une convention doit être définie ou émerger dans une communauté ou société, le comportement des membres de cette société doit constituer un équilibre de Nash. Autrement, au moins un des membres de la communauté sera incité à dévier de la convention, ce qui remet en cause la stabilité de cette convention. Le processus d'émergence d'une telle convention stable n'est pas aisé à décrire. Mais si une telle convention sociale stable devait exister, elle doit être un équilibre de Nash.

•L'équilibre de Nash en stratégies mixtes

Certains jeux peuvent n'admettre aucun équilibre de Nash en stratégies pures, comme dans l'exemple ci-dessous :

Joueur 2

		attaquer	battre en retraite
Joueur 1	attaquer	$2; 3$	$8; 0$
	battre en retraite	$6; 6$	$5; 8$

Dans une telle situation, chaque joueur adopte une stratégie mixte, c'est-à-dire une stratégie consistant à affecter une probabilité pour chacune des stratégies s_i.

Lorsqu'on introduit les stratégies mixtes, le calcul du paiement prend la forme de l'espérance de paiement et une stratégie non strictement dominée en stratégies pures peut le devenir lorsqu'on introduit la possibilité de stratégie mixte.

Dans l'exemple précédent, soit $(q, 1-q)$ la stratégie mixte du joueur 1 avec q représentant la probabilité que le joueur 1 joue "attaquer" et $1-q$ la probabilité que le joueur 1 joue "battre en retraite" et soit $(p, 1-p)$ la stratégie mixte du joueur 2 avec p représentant la probabilité que le joueur 2 joue "attaquer" et $1-p$ la probabilité que le joueur 2 joue "battre en retraite".

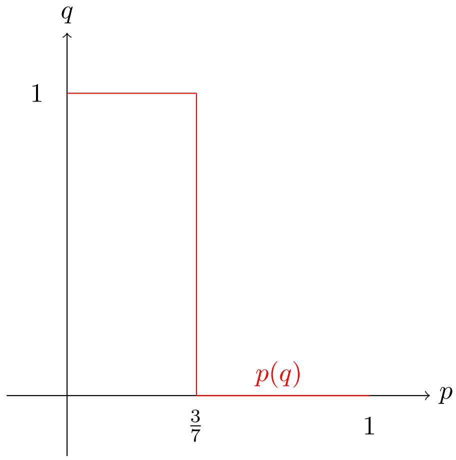
L'équilibre de Nash est obtenu lorsque pour chacun des joueurs, la stratégie choisie est une meilleure réponse aux meilleurs choix des autres joueurs. Pour cela, la recherche de l'équilibre de Nash commence par la détermination de la fonction (ou correspondance) de meilleure réponse de chaque joueur.

Le paiement espéré du joueur 1 en adoptant la stratégie mixte $(q, 1-q)$ étant donné que le joueur 2 adopte la stratégie mixte $(p, 1-p)$ est :

$u_1 = q(2p + 8(1-p)) + (1-q)(6p + 5(1-p)) = p + 5 + q(-7p + 3)$

Si $(-7p+3) > 0$, c'est à dire $p < \dfrac{3}{7}$, cette fonction est croissante par rapport à q et dans ce cas $q = 1$ est la meilleure réponse, c'est à-dire que le joueur 1 choisit "attaquer" . Sinon cette fonction est décroissante par rapport à q et dans ce cas $q = 0$ est sa meilleure réponse.

La correspondance de meilleure réponse $q(p)$ du joueur peut être représentée ainsi :

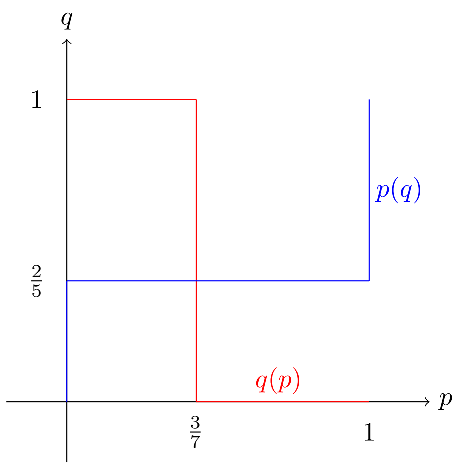


Le paiement espéré du joueur 2 en adoptant la stratégie mixte $(p, 1-p)$ étant donné que le joueur 1 adopte la stratégie mixte $(q, 1-q)$ est :

$u_2 = p(3q + 6(1-q)) + (1-p)(0q + 8(1-q)) = 8 - 8q + p(5q-2)$

Si $(5q-2) > 0$, c'est à dire $q > \dfrac{2}{5}$, cette fonction est croissante par rapport à p et dans ce cas $p = 1$ est la meilleure réponse , c'est à-dire que le joueur 2 choisit "attaquer" . Sinon cette fonction est décroissante par rapport à p et dans ce cas $p = 0$ est sa meilleure réponse.

En représentant la correspondance de meilleure réponse $p(q)$ du joueur2 sur le même graphique on obtient :



L'équilibre de Nash est obtenu lorsqu'on a simultanément $p* = p(q^*)$ et $q* = q(p^*)$. Il est donc représenté par le point d'intersection des courbes $p(q)$ et $q(p)$ soit $p = \dfrac{3}{7}, q = \dfrac{2}{5}$.

Le joueur 1 joue "attaquer" deux fois sur cinq, le joueur 2 joue "attaquer" trois fois sur sept est la solution du jeu.

La détermination de l'équilibre de Nash en stratégies mixtes devient plus aisée si on note qu'à cet équilibre, chaque joueur est indifférent entre ses différentes stratégies pures étant donnée la stratégie mixte des autres joueurs.

$u_1(\text{"attaquer"}, s_2) = u_1(\text{"battre en retraite"}, s_2)$, soit $2p + 8(1-p) = 6p + 5(1-p)$, soit $p = \dfrac{3}{7}$.

$u_2(s_1, \text{"attaquer"}) = u_2(s_1, \text{"battre en retraite"})$, soit $3q + 6(1-q) = 0q + 8(1-q)$, soit $q = \dfrac{2}{5}$.

• L'équilibre de Nash avec « mains tremblantes »

Il s'agit d'un raffinement de l'équilibre de Nash introduit par Selten (1975) pour tenir compte de la possibilité toujours présente d'erreur de la part des joueurs. Ce critère de perfection permet ainsi d'écarter certains équilibres de Nash non « désirables ».

Le concept de l'équilibre de Nash n'est pas suffisant pour écarter un profil de stratégies consistant pour les joueurs à choisir une action faiblement dominée.

Un équilibre de Nash doit être considéré comme une prédiction raisonnable s'il demeure un équilibre de Nash même en présence de la possibilité (très petite) d'erreur de la part des joueurs.

Considérons le jeu sous forme normale représenté par la matrice des paiements suivante :

		Joueur 2	
		L	R
Joueur 1	U	$\underline{2}$, $\underline{2}$	1 , - 3
	D	-3 , 1	$\underline{1}$, $\underline{1}$

Ce jeu admet deux équilibres de Nash : (U, L) et (D, R).

Pour montrer comment ce raffinement permet d'éliminer l'équilibre (D, R), considérons la possibilité que le joueur 2, au moment de choisir l'action R, commette une erreur et retient l'action L. Cette possibilité a une probabilité de $\frac{1}{n}$

Dans ce cas, en jouant D, le joueur 1 obtient une espérance de paiement égale à $-3\frac{1}{n} + 1 \times (1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{4}{n}$

En jouant U, il obtient une espérance de paiement égale à $2\frac{1}{n} + 1 \times (1 - \frac{1}{n}) = 1 + \frac{1}{n}$

Comme $1 + \frac{1}{n} > 1 - \frac{4}{n}$, l'introduction de la possibilité d'erreur implique que D n'est plus une meilleure réponse du joueur 1 au choix de R par le joueur 2. En conséquence, l'équilibre de Nash (D,R) n'est pas un équilibre de Nash acceptable.

De la même manière, on peut vérifier que l'équilibre de Nash (U, L) satisfait ce test de robustesse.

Si le joueur 2, au moment de choisir l'action L, commette une erreur et retient l'action R avec une probabilité de $\frac{1}{n}$

En jouant U, le joueur 1 obtient une espérance de paiement égale à $2(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$

En jouant D, il obtient une espérance de paiement égale à $-3(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{n} = -3 + \frac{4}{n}$

...... et$2 - \frac{1}{n} > -3 + \frac{4}{n}$

Terminons cette partie en énonçant le théorème de nash :

Soit $G = [n; \{S_i\}; \{u_i\}]$ un jeu sous forme normale. Si n est fini et si les ensembles $S_1, ..., S_n$ sont des ensembles finis, alors ce jeu admet un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

2. Jeux simultanés à information complète, applications

• Le modèle de duopole (concurrence imparfaite) de Cournot

Le duopole est : «un marché qui est servi par deux producteurs et sur lequel les demandes proviennent de nombreux agents qui sont individuellement petits. La théorie économique représente cette situation sous l'hypothèse que le même prix s'appliquera aux échanges de toutes les unités du bien considéré et que la demande est concurrentielle dans le sens suivant : la quantité totale vendue dépend du prix du bien et de rien d'autre ».

Dans le cadre de ce modèle, les deux firmes 1 et 2 choisissent simultanément leur quantité q_1 et q_2, l'offre totale du marché est donc $Q = q_1 + q_2$.

Le prix de marché p est une fonction décroissante de la quantité totale offerte, soit $p = p(Q)$ avec $p'(Q) < 0$. La fonction p(Q) est appelée fonction de demande inverse.

Chaque firme supporte un coût de production c_i en fonction de la quantité produite, soit $c_i = c_i(q_i)$ et le profit de la firme i est donc :

$u_i(q_i, q_{-i}) = q_i.p - c_i = q_i.p(q_1 + q_2) - c_i(q_i)$

L'équilibre de Cournot suppose que chacune des deux firmes maximise son profit étant donné que l'autre firme également prend une décision de production dans l'objectif de maximiser son profit. L'équilibre de Cournot (q_1^*, q_2^*) représente l'équilibre de Nash de ce duopole

Pour la firme 1, la fonction de réaction est $r_1(q_2)$ et est le résultat du programme suivant :

$\max_{q_1} \; u_1(q_1, q_2) = q_1.p(q_1 + q_2) - c_1(q_1)$

u_1 étant dérivable , la condition du premier ordre implique que q_1^* est déterminé par l'équation suivante :

$\frac{d}{dq_1} u_1(q_1, q_2) = p(q_1^* + q_2) + q_1^*.\frac{d}{dq_1} p(q_1^* + q_2) - \frac{d}{dq_1} c_1(q_1^*) = 0$

Même calcul pour la firme 2 et ainsi l'équilibre de Nash ($q_1^* = r_1(q_2^*)$ et $q_2^* = r_2(q_1^*)$) est caractérisé par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} p(q_1^* + q_2^*) + q_1^*.\frac{d}{dq_1} p(q_1^* + q_2^*) - \frac{d}{dq_1} c_1(q_1^*) & = 0 \\ p(q_1^* + q_2^*) + q_2^*.\frac{d}{dq_2} p(q_1^* + q_2^*) - \frac{d}{dq_2} c_2(q_2^*) & = 0 \end{cases}$$

Dans l'une des versions les plus simples de ce modèle, on considère que la fonction de demande inverse et la fonction de coût sont linéaires, soit :

$p(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$, avec $b > 0$ et $c_i(q_i) = c\ q_i$ avec $0 \leq c \leq a$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a - 2bq_1^* - bq_2 - c & = 0 \\ a - 2bq_2^* - bq_1 - c & = 0 \end{cases}$$

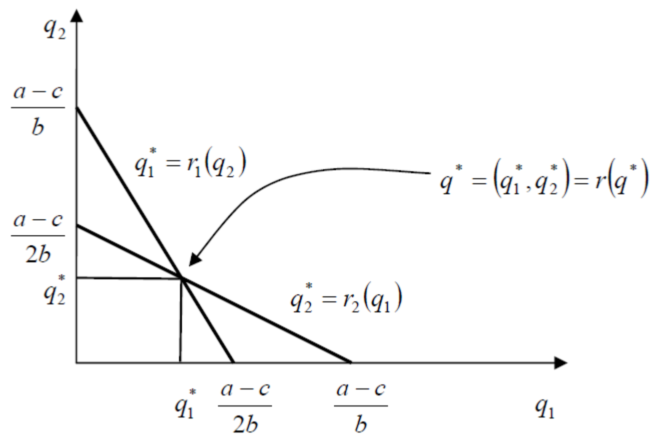
Les fonctions de meilleure réaction de Cournot des firmes 1 et 2 prennent alors la forme :

$q_1^* = r_1(q_2) = \dfrac{a - bq_2 - c}{2b}$

$q_2^* = r_2(q_1) = \dfrac{a - bq_1 - c}{2b}$

L'équilibre de Nash (de Cournot) obtenu après résolution de ces deux équations est : $q_1^* = q_2^* = \dfrac{a-c}{3b}$

La recherche de l'équilibre de Cournot peut se faire à l'aide d'une résolution graphique en représentant dans des coordonnées cartésiennes les fonctions de meilleure réponse des firme 1 et 2 , $r_1(q_2) = \dfrac{a - bq_2 - c}{2b}$ et $r_2(q_1) = \dfrac{a - bq_1 - c}{2b}$:



A cet équilibre, la quantité totale offerte est $\dfrac{2(a-c)}{3b}$ et le prix de marché est : $p(q_1 + q_2) = a - b\dfrac{2(a-c)}{3b} = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}c > c$ car $a > c$.

En d'autres termes, l'équilibre de Cournot est tel que le prix de marché est plus grand que le coût marginal.

- Le modèle de duopole de Bertrand

Dans le modèle de Bertrand, la variable de décision des firmes est le prix de vente et non la quantité à produire, dans ce modèle, il existe deux firmes $i = 1, 2$ produisant un bien partiellement substituables. Le coût unitaire de production, supposé constant et identique pour les deux firmes, est égal à c.

Chaque firme i choisit un prix de vente p_i et les quantités demandées adressées aux deux firmes 1 et 2 sont respectivement $q_1(p_1, p_2) == a - bp_1 + dp_2$ et $q_2(p_1, p_2) == a - bp_2 + dp_1$ avec $b > d >$. Cette fonction de demande exprime l'idée selon laquelle la quantité demandée à une firme est négativement influencée par l'augmentation du prix proposé par cette firme et positivement influencée par l'augmentation du prix proposé par l'autre firme. De plus, le premier effet marginal est supérieur au second effet marginal.

Toutes ces données sont connaissance commune et les firmes prennent leur décision de prix de façon simultanée.

L'objectif de chaque firme est la maximisation de son profit. Pour la firme 1, on a donc :

$\max\limits_{p_1} \; u_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)(a - bp_1 + dp_2)$

La condition du premier ordre est :$\dfrac{d}{dp_1} u_1(p_1, p_2) = a - 2bp_1 + dp_2 + bc = 0$

Ceci permet d'obtenir la fonction de meilleure réponse $p_1^*(p_2)$ de la firme 1 : $p_1^*(p_2) = \dfrac{a + dp_2 + bc}{2b}$

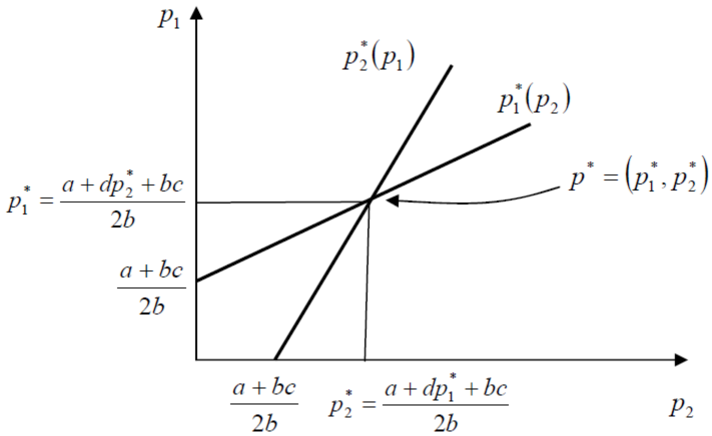
La même démarche appliquée à la firme 2 permet d'obtenir la fonction de meilleure réponse $p_2^*(p_1)$ de la firme 2 :$p_2^*(p_1) \dfrac{a + dp_1 + bc}{2b} =$

L'équilibre de Bertrand est la solution du système de deux équations suivantes :

$$\begin{cases} p_1^*(p_2) & \dfrac{a + dp_2^* + bc}{2b} \\ p_2^*(p_1) & = \dfrac{a + dp_1^* + bc}{2b} \end{cases}$$

Soit $(p_1^*, p_2^*) = (\dfrac{a + bc}{2b - d}, \dfrac{a + bc}{2b - d})$

Le schéma ci-dessous est la représentation graphique de l'équilibre de Bertrand - Nash.



• Le jeu de l'inspection

Le jeu de l'inspection fait intervenir un agent (par exemple un travailleur : joueur 1) et un principal (par exemple le contre-maître : joueur 2).

Le travailleur a le choix entre travailler (T) ou tricher (NT). En travaillant, le joueur 1 produit une valeur v mais supporte un coût d'effort g.

Le principal peut décider soit d'inspecter (I) soit de ne pas inspecter (NI). L'inspection a un coût h et permet au principal de s'assurer si l'agent a travaillé ou a triché.

Le travailleur obtient un salaire w sauf s'il existe une preuve (suite à une inspection) qu'il a triché. Dans ce dernier cas, il obtient 0.

Les deux joueurs choisissent leur stratégie de façon simultanée et toutes les données du jeu sont information commune. On a de plus $v > w > g > h > 0$. La matrice des paiements de ce jeu est donnée dans la figure ci-dessous :

Joueur 1 \ Joueur 2	$I\ (y)$	$NI\ (1-y)$
$NT\ (x)$	$0\ ,\ -h$	$w\ ,\ -w$
$T\ (1-x)$	$w-g\ ,\ v-w-h$	$w-g\ ,\ v-w$

Ce jeu n'admet aucun équilibre de Nash en stratégies pures.

Pour déterminer l'équilibre de Nash en stratégies mixtes, désignons par $(x, 1-x)$ la stratégie mixte du joueur 1 et $(y, 1-y)$ la stratégie mixte du joueur 2.

En jouant NT, le joueur 1 obtient un paiement espéré égal à $0.y + w.(1y) = w.(1y)$.

En jouant T, il obtient un paiement espéré égal à $(wg).y + (wg).(1y) = wg$.

On obtient la stratégie mixte d'équilibre du joueur 2 lorsque les deux stratégies T et NT procurent au joueur 1 la même espérance de paiement, soit lorsque $w.(1-y) = w-g$. On obtient ainsi $g = y.w$, soit $y = \frac{g}{w}$.

La probabilité d'inspection y est donc croissante par rapport au coût de l'effort g et décroissante par rapport au salaire w.

Pour le joueur 2, la stratégie I permet d'obtenir un paiement espéré de $-hx + (v - wh)(1-x)$

La stratégie NI un paiement espéré de $-wx + (v-w)(1-x)$.

On obtient la stratégie mixte d'équilibre du joueur 1 lorsque les deux stratégies I et NI procurent au joueur 2 le même paiement espéré, soit lorsque $-hx + (v-w-h)(1-x) = -wx + (v-w)(1-x)$. On obtient ainsi $h = wx$, soit $x = \frac{h}{w}$.

La probabilité de ne pas travailler (tricher) x est donc croissante par rapport au coût de l'inspection et décroissant par rapport au salaire.

Remarquons que les équations $g = y.w$ et $h = wx$ impliquent qu'à l'équilibre de Nash, on a $\frac{g}{y} = \frac{h}{x}$, soit :

$$\frac{\text{Probabilité de l'inspection}}{\text{Probabilité de tricher}} = \frac{\text{Coût de l'effort}}{\text{Coût de l'inspection}}$$

3. Jeux dynamiques à information complète

Dans ce chapitre, nous introduisons le fait qu'en réalité, le jeu est souvent soit répété, soit joué de façon séquentielle, ce qui donne la possibilité à au moins l'un des joueurs de réagir aux actions des autres joueurs après les avoir observées. Nous obtenons ainsi des jeux dynamiques.

Tout en maintenant l'hypothèse de l'information complète (c'est-à-dire que tous les joueurs connaissent toutes les données du jeu : l'ensemble des joueurs, les ensembles de stratégies et les fonctions de paiement), nous considèrerons que l'information peut être soit *parfaite* soit *imparfaite*. Par information parfaite, nous entendons la situation où le joueur à qui revient le tour de jouer connaît (observe et garde en mémoire) toute l'histoire du jeu. Par conséquent, l'information imparfaite décrit la situation où, à au moins un moment donné du jeu, le joueur à qui revient le tour de jouer ne connaît pas toute l'histoire du jeu.

Pour décrire un jeu dynamique, on utilise souvent un arbre de jeu qu'on appelle la *forme extensive* du jeu.

Dans cette classe des jeux dynamiques, la notion de *stratégie* devient un plan d'actions complet (ou trajectoire) indiquant les actions du joueur en toute circonstance où il intervient et la question centrale des jeux dynamiques est la *crédibilité*.

Ceci implique la nécessité d'un raffinement du concept d'équilibre de Nash permettant ainsi d'éliminer les équilibres de Nash non crédibles.

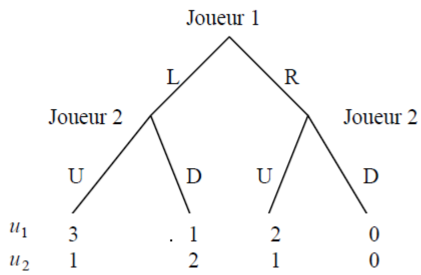
Le raffinement ainsi introduit a donné lieu à l'émergence de l'*équilibre de Nash-parfait* ou simplement d'un *équilibre parfait*.

Nous verrons aussi comment un jeu statique à information complète peut être interprété comme étant un jeu dynamique à information imparfaite.

L'exemple ci-dessous représente un jeu dynamique à information complète et parfaite, c'est-à-dire un jeu où :

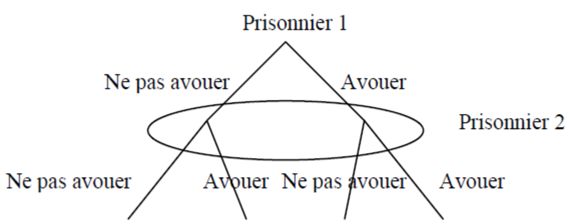
1) les joueurs jouent de façon séquentielle

2) à chaque étape du jeu, tous les précédents choix sont connaissance commune.



Les jeux statiques sont des jeux où les joueurs choisissent leurs actions simultanément. L'exemple du dilemme du prisonnier a été construit sur cette base. Mais en fait, le même résultat aurait été obtenu si les prisonniers avaient joué de façon séquentielle avec cependant la condition que le joueur jouant en seconde position n'observe pas le choix du joueur jouant en première position, on a interprété un jeu statique à information complète comme étant un jeu dynamique à information complète et imparfaite.

On peut de ce fait représenter le jeu du dilemme du prisonnier (jeu simultané) par le jeu dynamique suivant :



Pour exprimer l'idée que des noeuds de décision font partie d'un même ensemble d'information, on les entoure avec la même ellipse, cette représentation de l'ensemble d'information du prisonnier 2 signifie que ce dernier ne sait pas quel noeud de décision de cet ensemble est atteint.

Ainsi, on dira qu'un jeu dynamique est à information parfaite quand tous les ensembles d'information du jeu sont des singletons.

•Jeu séquentiel à information complète et parfaite

Dans un jeu séquentiel à information complète et parfaite, les joueurs jouent à tour de rôle. Au moment de choisir, chaque joueur connaît parfaitement l'histoire du jeu.

La méthode de récurrence vers l'amont (Backward Induction) permet de trouver la séquence optimale du jeu :

Au moment de jouer, le joueur 2 observe l'action a_1 choisie par le joueur 1. Il choisit une action 2 a qui soit la meilleure réponse à a_1 et est donc la solution du programme suivant :

$\max\limits_{a_2} \ u_2(a_1, a_2)$

Notons $a_2^* = MR_2(a_1)$ cette meilleure réponse, étant dans un cadre d'information complète, le joueur 1 connaît u$_1(a_1, a_2) lafonctionde$
la meilleure réponse du joueur 2. Il intégrera donc $MR_2(a_1)$ a dans son programme.

De ce fait, le joueur 1 choisit son action qui soit la solution du programme suivant :$\max\limits_{a_1} \ u_1(a_1, MR_2(a_1))$

En supposant encore que ce problème de maximisation n'admette qu'une seule réponse a_1^* , alors $(a_1^*, MR_2(a_1^*))$ est l'issue du jeu selon la méthode de Récurrence vers l'amont.

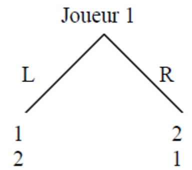
Concrètement, on remplacera chacun des sous-jeux du joueur 2 par les paiements résultants du choix optimal du joueur 2, puis on considère le meilleur choix pour le joueur 1.

D'une façon générale, la procédure de Récurrence vers l'amont s'applique à la classe des jeux finis à information parfaite.

Reprenons l'exemple ci-dessus $(L, R; U, D)$

le joueur 1 sait que s'il choisit L , la meilleure réponse du joueur 2 sera de jouer D car il obtient ainsi un paiement de 2 au lieu de 1. De même, il sait que s'il joue R , la meilleure réponse du joueur 2 sera de choisir U car lui procurant un paiement de 2 au lieu de 0.

Remplaçons chacun des sous-jeux du joueur 2 (l'un débutant après l'action L et l'autre après l'action R) par les paiements résultants du choix optimal du joueur 2,on obtient la forme extensive réduite suivante :



... le meilleur choix pour le joueur 1 est de jouer R et $(R;U)$ est la solution du jeu .

• Un autre exemple :
la firme E (Entrant) souhaitant entrer dans un marché et la firme I (la firme en place) ayant actuellement le monopole ou la domination du marché. Si la firme E décide d'entrer dans le marché, la firme I peut réagir (répondre) de l'une des deux manières suivantes :

- La firme I peut tolérer la présence de la firme E en lui laissant une part du marché et par conséquent laissant inchangé le niveau des prix.
- La firme I peut être hostile à la présence de la firme E en engageant une guerre des prix (dumping) occasionnant des pertes (ou faisant réduire les bénéfices) pour les deux parties.

Cette situation de jeu peut être représentée sous les formes normale suivante :

Firme I

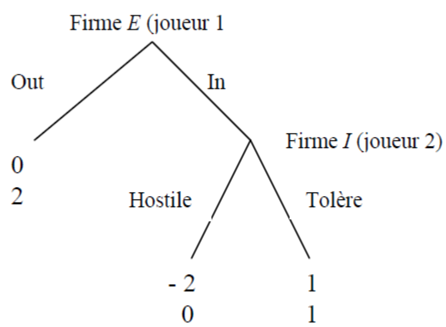
		Hostile si la firme E choisie "In"	Tolère si la firme E choisie "In"
Firme E	Out	0 ; 2	0 ; 2
	In	-2 ; 0	1 ; 1

Ce jeu admet deux équilibres de Nash : (Out , Hostile si la firme E choisit "In") et (In , Tolérer si la firme E choisit "In").

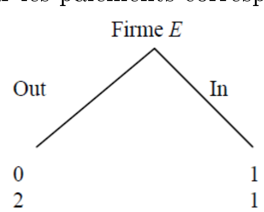
Cependant que le premier équilibre n'est pas une prédiction raisonnable ou crédible.

La crédibilité est ainsi une restriction naturelle à imposer à l'équilibre de Nash et pour qu'un équilibre soit acceptable, il doit spécifier des actions optimales en tout point du jeu. La procédure de Récurrence vers l'amont (Backwards Induction) assure que les stratégies des joueurs sont optimales à chaque étape du jeu.

Représentons ce jeu sous forme extensive :



On commence donc par identifier les plus petits sous-jeux contenant les noeuds terminaux. On remplace par la suite ces plus petits sous-jeux par les paiements correspondant à l'équilibre de Nash.



...on obtient ainsi l'équilibre de Nash parfait (les stratégies des joueurs constituent un équilibre de Nash dans tous les sous-jeux) suivant : (In , Tolérer si la firme E choisit "In")

• Une autre application de la récurrence vers l'amont : le modèle de duopole de Stackelberg

Le modèle de duopole de Stackelberg (1934) est un exemple de jeu dynamique à information complète et parfaite.

On considère un marché où existent deux firmes. L'une (la firme 1) est le leader et l'autre (la firme 2) est le follower. La décision à prendre pour chaque firme porte sur la quantité à produire.

Par rapport au modèle de Cournot où les quantités sont choisies simultanément par les deux firmes, dans le modèle de Stackelberg, les quantités sont choisies de façon séquentielle. Le déroulement du jeu est donc le suivant :

- La firme 1 choisit une quantité q_1

. - La firme 2 observe q_1 et choisit une quantité q_2 .

Comme dans le modèle de Cournot :

On considère que le coût unitaire de production c, est constant.

La quantité totale offerte par les deux firmes est $Q = q_1 + q_2$

$P(Q)$ est la fonction de demande inverse donnant le prix d'équilibre du marché en fonction de la quantité totale offerte par les deux firmes, on considère que cette fonction prend la forme linéaire $P(Q) = a - b(q_1 + q_2)$ avec $a \geq c$.

La résolution du jeu par la méthode de Récurrence vers l'amont (Backwards Induction) commence par la détermination du choix optimal de la firme 2.

$\max_{q_2} \; u_2(q_1, q_2^*) = q_2(a - b(q_1 + q_2)) - c(q_2)$

La condition nécessaire et suffisante est :

$\frac{d}{dq_2} u_2 = a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$

Soit $q_2^* = mr_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$ (Comme dans le "Cournot" classique , voir p6)

Etant donnée l'hypothèse d'information complète (chaque firme connaît la fonction de paiement de l'autre), la firme 1 peut anticiper la meilleure réponse $mr_2(q_1)$ de la firme 2. La quantité q_1^* est donc la solution du programme suivant :

$\max_{q_1} \; u_1(q_1, q_2^*) = q_1(a - b(q_1 + q_2^*)) - c(q_1) = q_1(a - b(q_1 + \frac{a - bq_1 - c}{2b})) - c(q_1) = q_1 \frac{a - bq_1 - c}{2}$

La condition nécessaire et suffisante est donc :

$\frac{d}{dq_1} u_1 = \frac{a - 2bq_1 - c}{2} = 0$

Soit $q_1^* = mr_1(q_2) = \frac{a - c}{2b}$ et donc $q_2^* = mr_2(q_1^*) = \frac{a - bq_1^* - c}{2b} = \frac{a - c}{4b}$

La solution du modèle de duopole de Stackelberg est donc $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{a - c}{2b}, \frac{a - c}{4b})$

En comparant par rapport au résultat du modèle de Cournot, on peut remarquer que la quantité choisie par le leader q_1^* est supérieure à la quantité choisie par chaque firme en situation de choix simultanés $\frac{a - c}{3b}$, elle-même supérieure à la quantité choisie par le follower $\frac{a - c}{4b}$.

La quantité totale produite dans le choix séquentiel, $Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{3(a - c)}{4b}$ est supérieure à celle produite en situation de choix simultanés, $\frac{2(a - c)}{4b}$

Comme conséquence, le prix de marché dans le modèle de Stackelberg est inférieur au prix de marché correspondant au modèle de Cournot. Il en résulte que par rapport à la situation de choix simultanés, le follower obtient un profit inférieur.

4. Jeux simultanés à information incomplète

Dans la classe des jeux statiques (simultanés) en information complète, les fonctions de paiement de tous les joueurs sont une information commune.

Désormais, nous introduisons la possibilité qu'au moins un des joueurs soit face à une incertitude concernant la fonction de paiement des autres joueurs. Nous abordons ainsi la classe des jeux statiques en information incomplète appelés jeux bayésiens. Dans cette classe de jeu, l'information privée détenue par le joueur i et non observée par les autres joueurs est appelée le type du joueur i.

Trois caractéristiques importantes des jeux statiques en information incomplète :

Le joueur$i$ a une information privée t_i qu'il est le seul à observer. Les autres joueurs ont des croyances à propos de cette information privée, croyances représentées par une distribution de probabilité dont le support est t_i .

La stratégie des joueurs dépend de leur type, ce qui donne l'expression $s_i(t_i)$.

Le paiement prend la forme d'une espérance de paiement (espérance d'utilité).

On considère que la caractéristique t_i est la réalisation d'une variable aléatoire et représente le résultat du mouvement d'un nouvel agent (fictif), la "Nature". Pour cette approche des jeux statiques a information incomplète, on considère que la Nature joue en premier lieu en procédant au tirage aléatoire du type t_i du joueur i.

Cette démarche (proposée par Harsanyi) consiste donc à interpréter un jeu statique à information incomplète en un jeu dynamique à information imparfaite. De plus, les croyances des joueurs étant révisées après le mouvement de la nature par application de la formule de Bayes, les jeux de cette classe sont également appelés jeux bayésiens.

• Jeu de "free riding" avec asymétrie de l'information

Pour illustrer cette réinterprétation du jeu statique en information incomplète en un jeu dynamique en information imparfaite, reprenons l'exemple du free riding, attention, l'information n'est ici asymétrique que pour un seul joueur, la situation est moins complexe que dans les exemples suivants.

Rappel de la situation de base :

		Joueur 2	
		Travailler	Tricher
Joueur 1	Travailler	1 , 1	-1 , 2
	Tricher	2 , -1	0 , 0

Supposons d'abord que le joueur 1 ressente un coût psychologique de 2 en équivalent monétaire s'il venait à ne pas travailler sachant que le joueur 2 a travaillé. L'existence de ce coût psychologique pour le joueur 1 est connaissance commune du jeu et ne représente aucune asymétrie d'information.

L'asymétrie d'information que nous introduisons dans le modèle de free riding porte sur l'incertitude qu'a l'individu 1 concernant les préférences de l'individu 2. Cette incertitude concerne l'existence d'un coût psychologique que pourrait ressentir l'individu 2 s'il venait à ne pas travailler. L'incertitude qu'a l'individu 1 à propos des préférences de l'individu 2 donne lieu à des croyances qui prennent la forme d'une distribution de probabilité. C'est ainsi que pour l'individu 1 :

Avec la probabilité α , l'individu 2 ne ressent aucun coût psychologique à ne pas travailler. Dans ce cas, la matrice des gains du jeu est la suivante :

Joueur 2

Joueur 1		Travailler	Ne pas travailler
	Travailler	1 ; 1	-1 ; 2
	Ne pas travailler	0 ; -1	0 ; 0

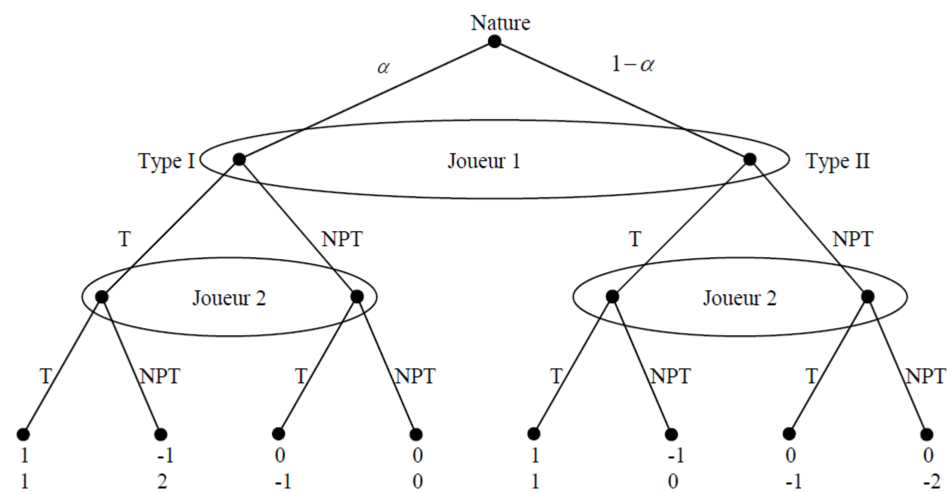
Avec la probabilité $1-\alpha$, l'individu 2 ressent un coût psychologique de 2 en équivalent monétaire s'il ne travaille pas. Dans ce cas, la matrice des gains du jeu est la suivante :

Joueur 2

Joueur 1		Travailler	Ne pas travailler
	Travailler	1 ; 1	-1 ; 0
	Ne pas travailler	0 ; -1	0 ; -2

La première étape (premier mouvement) du jeu est réalisée par la Nature à qui il revient de choisir par tirage aléatoire du type (I ou II) du joueur 2. Ce mouvement est observé par le joueur 2, c'est-à-dire que ce joueur connaît son type. Mais le joueur 1 n'observe pas le choix de la nature. Tout au plus, il dispose des croyances (α ,1-α) à propos du choix aléatoire de la Nature.

La représentation de ce jeu sous la forme extensive est la suivante :



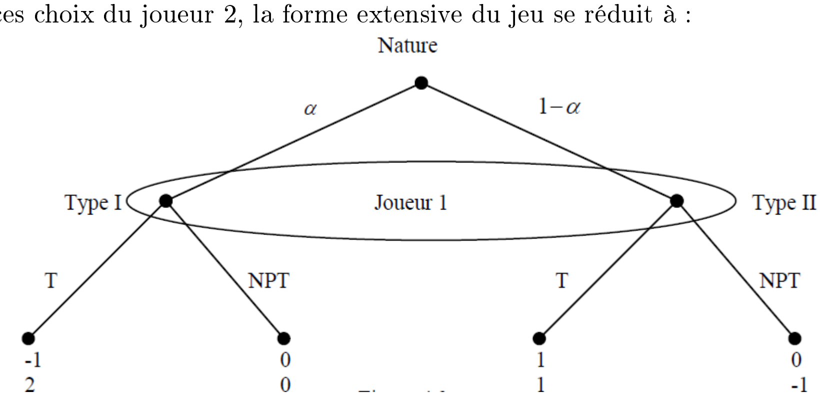
L'ellipse de haut signifie que le joueur 1 ne connaît pas le résultat du tirage aléatoire de la Nature.

Les ellipses de bas signifient que le joueur 2 ne connaît pas le choix du joueur 1 (jeu simultané) .

La résolution du jeu commence par le joueur 2 :

S'il est du type I, il choisira de ne pas travailler (stratégie strictement dominante) et s'il est du type II, il choisira de travailler (stratégie strictement dominante).

Etant donnés ces choix du joueur 2, la forme extensive du jeu se réduit à :



Se basant sur ses croyances, le joueur 1 choisit l'action qui maximise son espérance de paiement :

"travailler" lui donne une espérance de gain égale à $-1.\alpha+1.(1-\alpha)=1-2\alpha$, "ne pas travailler" lui donne une espérance de paiement égale à $0.\alpha+0.(1-\alpha)=0$. L'individu choisira de travailler si $1-2\alpha>0$, soit $\alpha<\frac{1}{2}$ et choisira de ne pas travailler sinon.

Remarquons que cette méthode de résolution est similaire à celle de la récurrence vers l'amont.

• Duopole de Cournot avec asymétrie de l'information

Un autre exemple d'asymétrie partielle en considérant dans le modèle du duopole de Cournot que la firme 1 a une incertitude quant au coût marginal c_2 de la firme 2, celui-ci peut être égal à c_H (coût élevé) ou c_L (coût faible) avec respectivement les probabilités α et $(1-\alpha)$.

On choisit ici la fonction de demande inverse donnant le prix d'équilibre du marché $P(Q)=a-(q_1+q_2)$.

Pour la firme 1, la firme 2 peut donc avoir l'une des deux différentes fonctions de paiement (profit) possibles, soit :

$u_2(q_1,q_2;c_H)=q_2(a-(q_1+q_2))-c_H(q_2)$ ou $u_2(q_1,q_2;c_L)=q_2(a-(q_1+q_2))-c_L(q_2)$

la firme 2 n'a aucune incertitude quand à c_1, par conséquence, pour la firme 2, la fonction de paiement de la firme 1 demeure inchangée, soit :

$u_1(q_1,q_2;c_1)=q_1(a-(q_1+q_2))-c_1(q_1)$

Posons $t_1=ac_1=1$ (aucune incertitude relative au coût c_1 de la firme 1).

Par contre la valeur $t_2=ac_2$ n'est pas certaine pour la firme 1 qui ne dispose que des croyances a posteriori suivantes :

$P(t_2=\frac{3}{4})=\frac{1}{2}$ et $P(t_2=\frac{5}{4})=\frac{1}{2}$

$t_2=\frac{3}{4}$ correspond au type c_H, coût élevé et $t_2=\frac{5}{4}$ correspond au type c_H, coût faible.

La firme 2 choisit une quantité optimale en fonction de son type

$\max\limits_{q_2}\ u_2(q_1,q_2)=q_2(t_2-(q_1+q_2))$

La condition nécessaire et suffisante est :

$\frac{d}{dq_2}u_2=0$, soit $q_2^*=\frac{t_2-q_1}{2}$

On a donc $q_2^{H^*}=\frac{\frac{3}{4}-q_1}{2}$ et $q_2^{L^*}=\frac{\frac{5}{4}-q_1}{2}$

La firme 1 choisit la quantité optimale q_1^* en fonction de ses croyances sur la valeur de t_2, c'est à dire celle qui maximise son espérance de profit, soit :

$\max\limits_{q_1}\ u_1(q_1,q_2)=\frac{1}{2}(q_1(1-(q_1+q_2^H)))+\frac{1}{2}(q_1(1-(q_1+q_2^L)))$

La condition nécessaire et suffisante est :

$q_1^*=\frac{2-(q_2^H+q_2^L)}{4}$

L'équilibre de Nash bayésien du jeu s'obtient par la combinaison des trois conditions d'équilibre, soit :

$$q_1^*=\frac{2-(q_2^{H^*}+q_2^{L^*})}{4}=\frac{2-(\frac{\frac{3}{4}-q*_1}{2}+\frac{\frac{5}{4}-q_1^*}{2})}{4}$$

soit $q_1^*=\frac{1}{3}$ et donc $q_2^{H^*}=\frac{\frac{3}{4}-\frac{1}{3}}{2}=\frac{5}{24}$ et $q_2^{L^*}=\frac{\frac{5}{4}-\frac{1}{3}}{2}=\frac{11}{24}$

Il est important de préciser ici la notion de stratégie :

Dans le jeu bayésien , une stratégie pure du joueur i est la fonction $s_i(t_i)$ qui, pour chaque type possible t_i , spécifie une action s_i que le joueur i choisira si le type t_i venait à être tiré par la Nature.

Pour trouver l'équilibre de Nash, il faut que chaque joueur détermine la stratégie qui soit la meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs. Mais pour qualifier une stratégie de meilleure réponse, chaque joueur doit envisager toutes les stratégies possibles des autres joueurs.

Ainsi, même si chaque joueur i connaît son type t_i , on doit envisager toutes les valeurs de t_i et les actions qui en dépendent car c'est la démarche des autres joueurs quand ils doivent déterminer leur(s) meilleure(s) réponses.

Nous pouvons d'ores et déjà introduire la distinction entre un équilibre séparant (separating strategy) et un équilibre mélangeant (pooling strategy). Dans un équilibre séparant , chaque type t_i choisit une action différente et dans un équilibre mélangeant , tous les types t_i choisissent la même action.

• L'équilibre de Nash bayésien :

Dans le cadre d'un tel jeu, l'équilibre bayésien de Nash est défini comme suit :

Un profil de stratégies $(s_1(t_1),...,s_n(t_n))$ est un équilibre de Nash du jeu bayésien où chaque agent maximise son utilité espérée conditionnelle à ses croyances sur le type des autres agents. L'équilibre bayésien est donc moins exigeant que l'équilibre de Nash en information complète puisque les joueurs ne maximisent leur utilité qu'en espérance.

Il est important de comprendre ici que cette démarche est équivalente à la recherche de fonction de meilleure réponse.

Un exemple pour s'en assurer : Le modèle de Cournot selon l'approche de Harsanyi.

L'asymétrie de l'information concerne maintenant les deux firmes. Chacune des deux firmes choisit une quantité à produire q_i avec comme objectif la maximisation de son profit $u_i(q_1,q_2)=q_i(t_i-(q_1+q_2))$ avec $t_i=a-c_i$

Chaque firme i a une incertitude concernant le coût marginal c_i de l'autre firme de sorte que t_i peut être égal soit à $3/4$ soit à $5/4$.

Cette incertitude est résumée par la distribution *a priori* $p(t)$ suivante qui est connaissance commune :

	Type de la firme 2			
		3/4	5/4	
Type de la firme 1	3/4	3/8	1/8	$P(t_1=3/4)=1/2$
	5/4	1/8	3/8	$P(t_1=5/4)=1/2$
		$P(t_2=3/4)=1/2$	$P(t_2=5/4)=1/2$	

Bien comprendre $P(t_1 = 3/4 \text{ et } t_2 = 5/4) = P(t_1 = 3/4 \cap t_2 = 5/4) = 1/8$ par exemple ...

On dira que la firme i est du type L (coût marginal faible) si $t_i = 5/\ 4$ et du type H (coût marginal élevé) si $t_i = 3/\ 4$.

La détermination du type t_i de la firme i est le résultat du mouvement de la Nature, mouvement représentant la première étape du jeu.

Chacune des deux firmes observe par la suite son type et en déduit des probabilités révisées pour le type de l'autre firme.

Sur la base de leurs croyances, chaque firme choisit la quantité qui maximise son espérance de profit.

L'équilibre obtenu est un équilibre de Nash bayésien et est de la forme $q_1^{L^*}, q_1^{H^*}, q_2^{L^*}, q_2^{H^*}$ (Rappel : chaque joueur doit envisager toutes les stratégies possibles des autres joueurs) .

Considérons en premier lieu que par suite du mouvement de la Nature, le type de la firme 1 est L. Après observation de son type L et par application de la formule de Bayes, la firme 1 en déduit les probabilités *a posteriori* (révisées) sur le type t_2 du joueur 2, soit :

$P_{t_1=5/4}(t_2 = 3/4) = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{1}{4}$ et $P_{t_1=5/4}(t_2 = 5/4) = \dfrac{3/8}{1/2} = \dfrac{3}{4}$

Rappel de probabilité :

$\forall B$ tel que $P(B) \neq 0$ on appelle probabilité conditionnelle sachant B, et on note P_B , la probabilité définie sur Ω par

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \ \forall A \in \mathbb{A}$$

Le type L de la firme 1 détermine la quantité $q_1^{L^*}$ qui maximise son espérance de profit conditionnelle à ses croyances.

$$\max_{q_1^L} \ u_1(q_1, q_2) = \frac{1}{4}(q_1^L(\frac{5}{4} - q_1^L - q_2^H)) + \frac{3}{4}(q_1^L(\frac{5}{4} - q_1^L - q_2^L))$$

La condition nécessaire et suffisante est :

$$\frac{d}{dq_1^L}u_1 = 0, \text{ soit } \frac{1}{4}(\frac{5}{4} - 2q_1^L - q_2^H) + \frac{3}{4}(\frac{5}{4} - 2q_1^L - q_2^L) = 0$$

$$\text{Soit } q_1^{L^*} = \frac{\frac{5}{4} - (\frac{1}{4}q_2^H + \frac{3}{4}q_2^L)}{2}$$

Maintenant, on considère que par suite du mouvement de la Nature, la firme 1 est du type H, la firme 1 détermine les probabilités révisées (a posteriori) sur le type du joueur 2, ce qui donne

$P_{t_1=3/4}(t_2 = 3/4) = \dfrac{3/8}{1/2} = \dfrac{3}{4}$ et $P_{t_1=3/4}(t_2 = 5/4) = \dfrac{1/8}{1/2} = \dfrac{1}{4}$

Un calcul semblable au précédent donne :

$$q_1^{H^*} = \frac{\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}q_2^H + \frac{1}{4}q_2^L)}{2}$$

La même démarche, appliquée à la firme 2, permet d'obtenir

$$q_2^{L^*} = \frac{\frac{5}{4} - (\frac{1}{4}q_1^H + \frac{3}{4}q_1^L)}{2} \text{ et } q_2^{H^*} = \frac{\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}q_1^H + \frac{1}{4}q_1^L)}{2}$$

Dans les quatre équations ci-dessus, $q_1^{L^*}$, $q_1^{H^*}$, $q_2^{L^*}$ et $q_2^{H^*}$ représentent les fonctions de meilleure réponses des firmes 1 et 2 pour chaque type possible.

L'équilibre de Nash bayésien est la solution du système suivant :

$$q_1^{L^*} = \frac{\frac{5}{4} - (\frac{1}{4}q_2^{H^*} + \frac{3}{4}q_2^{L^*})}{2}$$

$$q_1^{H^*} = \frac{\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}q_2^{H^*} + \frac{1}{4}q_2^{L^*})}{2}$$

$$q_2^{L^*} = \frac{\frac{5}{4} - (\frac{1}{4}q_1^{H^*} + \frac{3}{4}q_1^{L^*})}{2}$$

$$q_2^{H^*} = \frac{\frac{3}{4} - (\frac{3}{4}q_1^{H^*} + \frac{1}{4}q_1^{L^*})}{2}$$

La résolution de ce système d'équations donne l'équilibre de Nash bayésien, c'est-à-dire :

$$(q_1^{L^*},\ q_1^{H^*},\ q_2^{L^*}\ ,\ q_2^{H^*}) = (\frac{13}{30}; \frac{7}{30}; \frac{13}{30}; \frac{7}{30})$$

5. Jeux dynamiques à information incomplète

Dans cette classe de jeux, on étudie l'issue de l'interaction des joueurs en l'existence simultanée de deux difficultés.

En premier lieu, au moins l'un des joueurs ne dispose pas de toute l'information pertinente concernant les caractéristiques des autres joueurs (information incomplète).

En second lieu, le jeu est dynamique, ce qui peut donner aux joueurs lors du déroulement du jeu la possibilité d'extraire de nouvelles informations à partir de l'observation des actions passées.

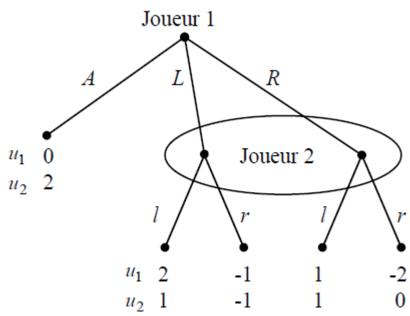
Chaque joueur peut donc réviser ses croyances sur l'autre joueur et ce dernier doit en tenir compte lors du choix de son action.

Ainsi, dans un jeu dynamique à information incomplète ou imparfaite, il existe non seulement une interaction entre les stratégies des joueurs mais également une interaction entre stratégies et croyances.

Le concept d'équilibre approprié pour cette classe de jeux est l'équilibre de Nash bayésien parfait, ou tout simplement équilibre bayésien parfait.

Première remarque :

Lorsque le jeu dynamique est à information incomplète (ou imparfaite), le principe de rationalité séquentielle (un équilibre du jeu est également un équilibre dans tous les sous-jeux de l'équilibre) peut être insuffisant comme le montre l'exemple du jeu ci-dessous :



Dans ce jeu, le joueur 1 joue en premier et a le choix entre les trois actions A, L ou R. S'il choisit A, le jeu se termine. S'il choisit L ou R, le joueur 2 jouera à son tour en choisissant l ou r. Au moment de jouer, le joueur 2 n'observe pas quelle action (L ou R) le joueur 1 a choisi.

Mettons-le sous la forme normale pour identifier les équilibres de Nash :

		Joueur 2	
		l si « non *A* »	*r* si « non *A* »
Joueur 1	*A*	0 , 2	0 , 2
	L	2 , 1	- 1 , - 1
	R	1 , 1	- 2 , 0

Deux équilibres de Nash émergent, qui sont : (L, l si « non A ») et (A, r si « non A »).

Ce jeu n'admettant aucun sous-jeu les équilibres de Nash doivent être parfaits or le second équilibre n'est pas raisonnable en effet jouer l est toujours la meilleure pour le joueur 2.

Utilisons cet exemple pour présenter les raffinements de l'équilibre de Nash bayésien,

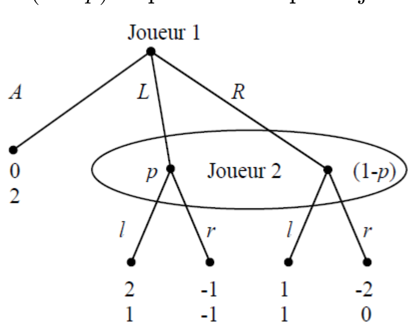
La première solution proposée pour l'élimination des équilibres de Nash non raisonnables consiste en l'introduction de la notion de *croyances* qui peuvent être de natures variées.

Propriété 1 de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) :

A chaque ensemble d'information , le joueur qui doit joueur à cet ensemble d'information , dispose de croyances à propos des noeuds atteints par le jeu.

Dans l'exemple précédent , la propriété 1 signifie que si le jeu atteint l'ensemble d'information non singleton du joueur 2, ce dernier doit avoir des croyances à propos de quel noeud est atteint par le jeu.

Un système de croyances est la distribution de probabilité $(p, 1-p)$ assignée par le joueur 2 où p est la probabilité que le jeu ait atteint le noeud L et $(1-p)$ la probabilité que le jeu ait atteint le noeud R.



Propriété 2 de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) :

A chaque ensemble d'information , l'action choisie par le joueur doit être optimale étant données ses croyances à cet ensemble d'information.

La rationalité est ici interprétée comme étant un comportement de maximisation de l'espérance de paiement

Etant données les croyances du joueur 2, celui-ci obtient une espérance de paiement égale à $p.(1) + (1-p).(1) = 1$ s'il joue l et égal à $p.(-1) + (1-p).0 = -p$ s' il joue r. Comme $1 > -p$ pour tout p, la propriété 2 empêche le joueur 2 de jouer r, ce qui suffit à éliminer l'équilibre non plausible (A, r si « non A »).

Un point crucial : Pour qu'un équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) soit une prédiction raisonnable, il est nécessaire que les croyances à cet équilibre soient cohérentes avec les stratégies de cet équilibre.

Par exemple, si dans le jeu ci-dessus, le joueur 1 utilise la stratégie complètement mixte assignant la probabilité $\frac{1}{2}$ à l'action A, la probabilité $\frac{1}{3}$ à l'action L et la probabilité $\frac{1}{6}$ à l'action R alors la règle de Bayes impose :

La probabilité de L étant donné que l'ensemble d'information du joueur 2 est atteint est : $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \dfrac{2}{3}$

La probabilité de R étant donné que l'ensemble d'information du joueur 2 est atteint est : $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = \dfrac{1}{3}$

...et seule la croyance $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ du joueur 2 sont consistantes avec la stratégie mixte du joueur 1

La condition de cohérence des croyances sur le sentier d'équilibre (pour un équilibre donné dans un jeu sous forme extensive, un ensemble d'information est situé sur le sentier d'équilibre s'il est atteint avec une probabilité positive) est la troisième propriété de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite).

Propriété 3 de l'équilibre d'un jeu dynamique à information incomplète (ou imparfaite) :

A chaque ensemble d'information situé sur le sentier d'équilibre (atteint avec une probabilité strictement positive), les croyances sont déduites des stratégies d'équilibre des joueurs par utilisation de la règle de Bayes.

Les propriétés 1 à 3 permettent de donner la définition de l'équilibre bayésien parfait

On retiendra : En tout ensemble d'information situé sur le sentier d'équilibre, un joueur choisit une action qui maximise son espérance de paiement, compte tenu des probabilités a posteriori et des stratégies des autres joueur.

Finissons l'exemple développé ci-dessus,

Dans l'équilibre de Nash parfait (L, l si « non A »), le joueur 2 cherche à déterminer sa meilleure réponse au choix de L par le joueur 1. Il suppose donc que le joueur 1 a choisi L. La seule croyance cohérente à cette supposition est $p = 1$.

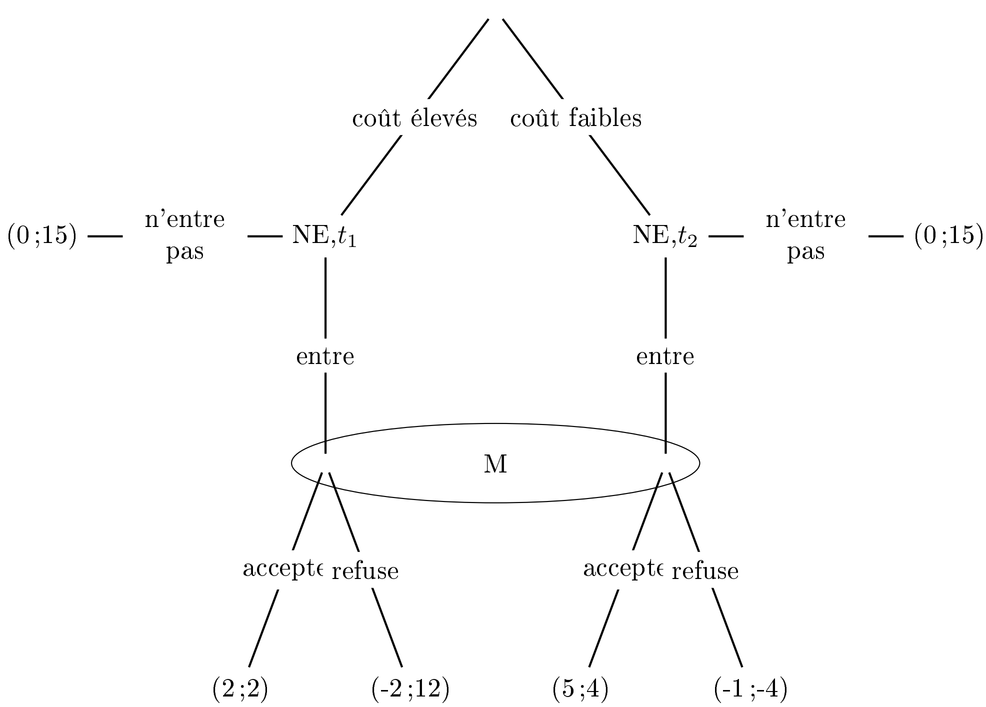
L'équilibre bayésien parfait est le couple stratégies / croyances suivant : (L, l si « non A », $p = 1$).

L'équilibre bayésien parfait est une mixture du concept d'équilibre parfait des jeux dynamiques et du concept d'équilibre bayésien des jeux à information incomplète mais il faut tenir compte du fait que durant le déroulement du jeu, de l'information est indirectement transmise entre les joueurs , ceci donne donc aux joueurs la possibilité (ce n'est pas systématique) de réviser leurs croyances sur les types des autres joueurs suite à l'observation des choix antécédents de ces autres joueurs.

Le monopole du nouvel entrant (pour illustrer la propriété 3) :

Le nouvel entrant (NE) peut entrer ou ne pas entrer sur le marché et le monopole (M) peut l'accepter ou non.

L'incomplétude est ici liée au fait que M ignore si NE a des coûts de production faibles ou élevés .



On suppose : $P(\text{coûts faibles}) = P(\text{coûts élevés}) = \frac{1}{2}$;

Les croyances de M sont : $P_{t_1}(entre) = 0.3$ et $P_{t_2}(entre) = 1$

Déterminons $P_{entre}(t_1)$ et $P_{entre}(t_2)$:

On note $P_{entre}(t_1)$ la probabilité que NV soit de type t_1 étant donné que l'ensemble d'information du joueur 2 (correspondant à l'action "entre" du joueur 1) est atteint.

$$P_{entre}(t_1) = \frac{P(t_1)}{P(entre)} \times P_{t_1}(entre) = \frac{\frac{1}{2}}{P_{t_1}(entre) \times P(t_1) + P_{t_2}(entre) \times P(t_2)} \times P_{t_1}(entre) = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + 0.3\frac{1}{2}} \times 0.3 = 0.23$$

et donc $P_{entre}(t_2) = 0.77$

M calcule alors son espérance de gain :

S'il joue "accepte" :$u = 2 \times 0.23 + 4 \times 0.77 = 3.54$ et s'il joue "refuse" : $u = 12 \times 0.23 - 4 \times 0.77 = -0.32$

Donc M joue "accepte" et pour NV "entrer" est bien une stratégie dominante (2>0 et 5>0), il n'est donc pas incité à dévier et on obtient l'équilibre bayésien parfait suivant :((NV entre ; M accepte) ; $P_{t_1}(entre) = 0.3$, $P_{t_2}(entre) = 1$)

Les croyances font partie de la solution du jeu , on dit que la solution (NV entre ; M accepte) est soutenue par les croyances ($P_{t_1}(entre) = 0.3$, $P_{t_2}(entre) = 1$) .

Considérons maintenant un autre système de croyance : $P_{t_1}(entre) = 0.9$ et $P_{t_2}(entre) = 1$

On obtient alors $P_{entre}(t_1) = 0.48$ et $P_{entre}(t_2) = 0.52$

Si M joue "accepte", $u = 3.04$ et s'il joue "refuse", $u = 3.68$. Donc cette fois ci M joue "refuse".

Pour NV, "n'entre pas" est alors une stratégie dominante (0>-2 et 0>-1), NV est incité à dévier : pas d'équilibre bayésien parfait.

Un autre exemple :

Deux joueurs commencent par mettre un euro dans le pot.

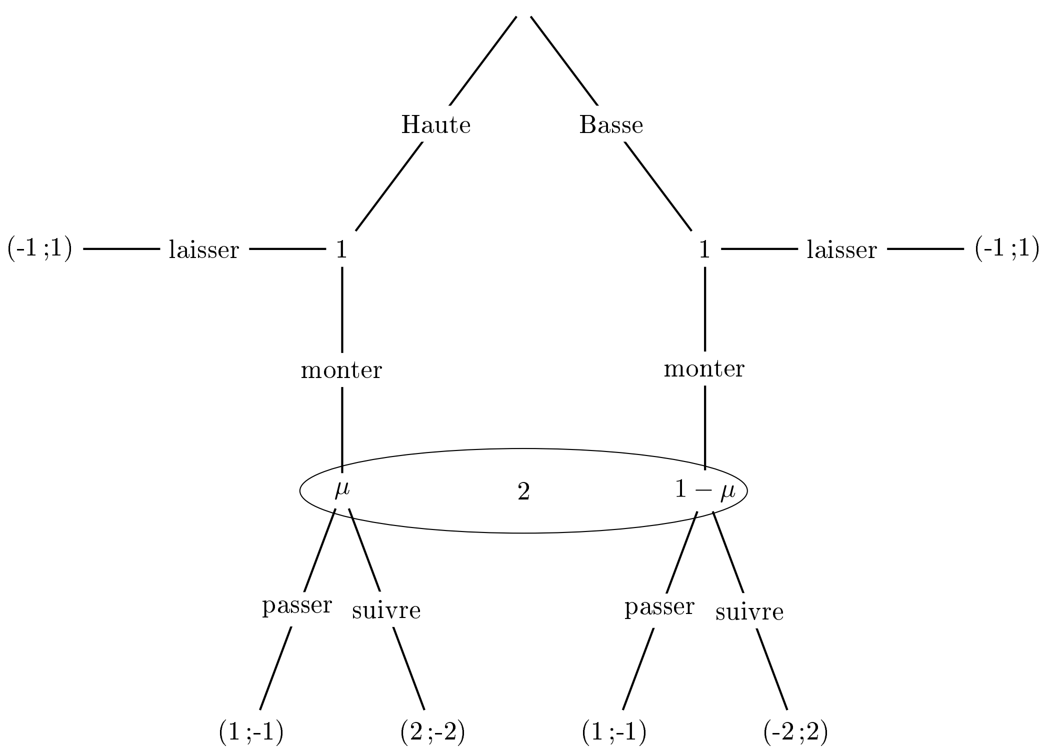
On donne au joueur 1 une carte qui peut être "Haute" avec probabilité q ou "Basse" avec probabilité$(1-q)$. Il peut "laisser" ou "monter".

Si il "laisse", le joueur 2 prend le pot et le jeu s'arrête. Si le joueur 1 "monte", il rajoute 1 dans le pot et le joueur 2 a le choix entre "passer" et "suivre".

Si il "passe", le joueur 1 prend le pot.

Si le joueur 2 "suit", il ajoute 1 dans le pot et le joueur 1 montre la carte.

Si elle est "Haute", le joueur 1 prend le pot, sinon le joueur 2 le prend.



Afin de déterminer le(s) équilibre(s) Bayesien parfait, plaçons nous en l'ensemble d'information, après que le joueur 1 ait monté. Le joueur 2 forme alors des croyances sur le type de la carte.

Notons μ sa croyance sur la probabilité que la carte soit haute sachant que 1 a monté : $P_{Monter}(Haute)$ et $1-\mu$ sa croyance sur $P_{Monter}(Basse)$. Remarquons ici que les croyances du joueur 2 sont de nature différentes que celle de l'exercice précédent.

Étant données ces croyances, 2 va comparer ses espérances de gain :

S'il joue "suivre" : $u = -2\mu + 2(1-\mu)$ et s'il joue "Passer" : $u = -1\mu - 1(1-\mu)$

...et $-2\mu + 2(1-\mu) > -1\mu - 1(1-\mu)$ pour $\mu < \dfrac{3}{4}$
donc si $\mu > \dfrac{3}{4}$, 2 passe ; si $\mu < \dfrac{3}{4}$, 2 suit et sinon il tire au sort sa stratégie .
Vérifions que ces croyances soient bien compatibles avec les stratégies d'équilibre qui en découlent.