Le comportement du consommateur

Soit $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ un vecteur de n biens , chaque composante x_i du vecteur représente la consommation en bien i.

" Le consommateur choisit le meilleur vecteur x dans un ensemble de vecteurs qui sont à priori possibles pour lui "

Le consommateur est soumis à une contrainte physique et à une contrainte économique et fait face au vecteur de prix $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$.

X représente les contraintes physiques qui sont imposées au consommateur. X doit être un ensemble convexe, fermé et borné pour que l'on puisse utiliser les théorèmes mathématiques ci-dessous .

La contrainte économique s'écrit : $px = \sum_{h=1}^{n} p_h x_h \leq R$, où R et p sont des données exogènes.

Le choix du meilleur vecteur dépend des préférences de l'individu.

Ses préférences sont représentées par une fonction d'utilité : $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ qu'il cherche à maximiser.

Un équilibre du consommateur est un vecteur x_0 qui maximise l'utilité $u(x)$ sous les contraintes économiques.

La solution d'équilibre $x_0 = \zeta(p, R)$ représente la fonction de demande du consommateur.

• Les axiomes de la théorie des préférences :

A.1 (Ordre total) Pour tout couple x_1, $x_2 \in X$, ou bien $x_1 \geq x_2$ ou bien $x_2 \geq x_1$. Tous les vecteurs de biens peuvent être comparés entre eux.

A.2 (Réflexivité) Pour tout vecteur x , $x \geq x$

A.3 (Transitivité) Si $x_1 \geq x_2$ et si $x_2 \geq x_3$ alors $x_1 \geq x_3$. Cet axiome nous assure qu'il y a un meilleur élément dans l'ensemble, ce qui est nécessaire pour les problèmes de maximisation.

• Les hypothèses sur u :

H.1 u est deux fois continûment dérivable.

H.2 u est strictement croissante (i.e. $\dfrac{\partial u}{\partial x} > 0$, voir ANNEXE 0 pour les dérivées partielles) , on suppose que la satisfaction du consommateur augmente avec x (le consommateur est insatiable).

H.3 u est différentiellement strictement quasi-concave ce qui nous assure que les surfaces (courbes) d'indifférence sont convexes.

La surface d'indifférence associée à x_0 est l'ensemble de tous les vecteurs x tels que $u(x) = u(x_0)$.

• Le taux marginal de substitution

Soit x_1 et x_2 tels que $u(x_1) = u(x_2)$.

$\Delta u = u(x_2) - u(x_1) \approx du = \dfrac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + ... + \dfrac{\partial u}{\partial x_n} dx_n = 0$

Supposons que seules les quantités des biens s et r varient, i.e. $dx_h = 0$, pour tout $h \neq r, s$

On a alors :

$du = \dfrac{\partial u}{\partial x_r} dx_r + \dfrac{\partial u}{\partial x_s} dx_s = 0$

donc $\dfrac{\partial x_r}{\partial x_s} = -\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_s}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_r}} = TMS_{s,r}$

Le taux marginal de substitution correspond au prix personnel du consommateur pour le bien s, exprimé en terme du bien r.

Le TMS est toujours négatif : le consommateur ne cédera une unité du bien s que si on le compense par une quantité positive du bien r.

Le TMS varie le long de la courbe d'indifférence : quand le consommateur possède peu du bien s, il exigera une plus grande compensation en bien r quand vient le temps de céder une unité du bien s, que quand il possède beaucoup du biens.

• L'équilibre du consommateur :

Le problème est : maximiser $u(x)$ sujet à $x \in X$ et $px \leq R$, on utilise pour ce faire la méthode de Lagrange : voir ANNEXE 1

Cherchons donc à maximiser $L = u(x) - \lambda(px - R)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_h} = \dfrac{\partial u}{\partial x_h} - \lambda p_h = 0, \qquad \forall h = 1, 2, ..., n \\ \\ \qquad\qquad \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -px + R = 0 \end{cases}$$

Considérons le cas pour deux biens $h = s, r$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_s} - \lambda p_s = 0 \text{ implique } \lambda = \dfrac{1}{p_s} . \dfrac{\partial u}{\partial x_s} \\ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_r} - \lambda p_r = 0 \text{ implique } \lambda = \dfrac{1}{p_r} . \dfrac{\partial u}{\partial x_r} \\ \\ \qquad \text{- (p}_s x_s + p_r x_r) + R = 0 \end{cases}$$

On en déduit $\lambda = \dfrac{1}{p_s} . \dfrac{\partial u}{\partial x_s} = \dfrac{1}{p_r} . \dfrac{\partial u}{\partial x_r}$ Soit $\dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_s}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_r}} = \dfrac{p_s}{p_r}$ ainsi, les conditions d'équilibre peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} TMS_{s,r} = -\dfrac{p_s}{p_r} \\ \\ \displaystyle\sum_{h=1}^{n} p_h x_h = R \end{cases} .$$

Graphiquement : "La pente de la tangente à la courbe d'indifférence=la pente de la droite budgétaire"
À l'équilibre, le taux marginal de substitution $TMS_{s,r}$ (ou valeur personnelle accordée par la consommateur au bien s , exprimée en terme du bien r) sera égal au rapport des prix $-\dfrac{p_s}{p_r}$ (ou prix relatif «officiel» du bien s , exprimé en terme du bien r).

Les fonctions de demande existent-elles ? Cest-à-dire, peut-on exprimer $x_1, x_2, ..., x_n$ et λ en fonction de $p_1, p_2, ..., p_n$ et R ?
Soit b_0 une solution du système ci-dessus, la réponse est oui si la dérivée du système d'équations par rapport aux variables $x_1, x_2, ..., x_n$ et λ (et évaluée en b_0) est une matrice inversible (application du théorème des fonctions implicites).
Avec le système ci-dessus, cas de deux variables, la condition serait :

$$J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x_s}(b_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_s x_r}(b_0) & -p_s \\ \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_r x_s}(b_0) & \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x_r}(b_0) & -p_r \\ -p_s & -p_r & 0 \end{bmatrix} \text{ est inversible .}$$

Grâce aux hypothèses faites sur u, cette matrice est de rang maximal et donc les fonctions de demande existent.

Lorsque l'on travaille avec une fonction d'utilité particulière, le calcul direct des fonctions de demande remplace la preuve d'existence. C'est ce que l'exemple suivant vient illustrer.

• Exemple 1 : Soit $u(x_1, x_2) = x_1 x_2$ la fonction d'utilité du consommateur, p_1 le prix de x_1, p_2 le prix de x_2 et R son revenu.
Le problème du consommateur est alors de maximiser son utilité compte tenu de sa contrainte budgétaire, c'est à dire :

$$\max_{x_1, x_2, \lambda} L = x_1 x_2 - \lambda(p_1 x_1 + p_2 x_2 - R)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 - \lambda p_1 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 - \lambda p_2 = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - R = 0 \end{cases}$$

De 1) et 2) : $\lambda = \dfrac{x_2}{p_1} = \dfrac{x_1}{p_2}$ donc $x_2 = x_1 \dfrac{p_1}{p_2}$
on remplace dans 3) : $p_1 x_1 + p_2 x_1 \dfrac{p_1}{p_2} = R$ et l'on obtient les fonctions de demande suivante :

$$x_1^* = \frac{R}{2p_1} \text{ et } x_2^* = \frac{R}{2p_2}$$

• Comportement du consommateur au voisinage de l'équilibre :

Soit $x = \zeta(p,R)$, le système de demande et considérons la différentielle totale de ce système.
$dx = \frac{\partial \zeta}{\partial p}dp + \frac{\partial \zeta}{\partial R}dR$ or $R = px$ donc $dR = pdx + xdp$
Soit $dx = \frac{\partial \zeta}{\partial p}dp + \frac{\partial \zeta}{\partial R}(pdx + xdp)$
Et $dx = (\frac{\partial \zeta}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial R}x)dp + \frac{\partial \zeta}{\partial R}pdx$
$\frac{\partial \zeta}{\partial R}$ le vecteur d'effets-revenu et pdx représente la variation du revenu réel.
Si la variation du revenu réel est nulle, $pdx = 0$, on a alors $dx = (\frac{\partial \zeta}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial R}x)dp$

Soit $\frac{\partial \zeta}{\partial p} + \frac{\partial \zeta}{\partial R}x = \frac{dx}{dp}$ sachant $pdx = 0$, noté $\left.\frac{dx}{dp}\right|_{pdx=0}$

Dans le cas de deux variables, l'équation ci-dessous s'écrit :

$\begin{bmatrix} dx_1 \\ \\ dx_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dp_1 \\ \\ dp_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial\zeta_1/\partial R \\ \\ \partial\zeta_2/\partial R \end{bmatrix} (p_1dx_1 + p_2dx_2)$ avec $K_{sr} = \frac{\partial \zeta_s}{\partial p_r} + \frac{\partial \zeta_s}{\partial R}x_r$

et la remarque ci-dessus s'écrit $\frac{\partial \zeta_s}{\partial p_r} + \frac{\partial \zeta_s}{\partial R}x_r = \left.\frac{\partial \zeta_s}{\partial p_r}\right|_{pdx=0}$

ou plus généralement : $\frac{\partial \zeta_s}{\partial p_r} = \left.\frac{\partial \zeta_s}{\partial p_r}\right|_{pdx=0} - \frac{\partial \zeta_s}{\partial R}x_r$ (Équation de Slutsky.)

...qui se traduit de la façon suivante : "effet-prix= effet de substitution− effet-revenu "

• La fonction ζ ci-dessus représente la fonction de demande exprimée en fonction des prix et du revenu, ce sont les fonctions de demande ordinaires que l'on appelle parfois les fonctions de demande Marshalliennes.

Il est possible de définir des fonctions de demande qui sont fonction des prix et de l'utilité. Ces fonctions de demande s'appellent les fonctions de demande Hicksiennes ou fonctions de demande compensée (car elle fournit la demande optimale à utilité donnée) et sont notées $h(p,u)$. Ces fonctions de demande ne sont bien entendues pas directement observable puisqu'elles dépendent de l'utilité.

L'équation de de Slutsky s'écrira alors : $\frac{\partial \zeta_s(p,R)}{\partial p_r} = \frac{\partial h_s(p,u)}{\partial p_r} - \frac{\partial \zeta_s(p,R)}{\partial R}x_r(p,R)$

Reprenons l'exemple 1 : $u(x_1,x_2) = x_1x_2$
$x_1^* = \zeta_1(p,R) = \frac{R}{2p_1}$ et $x_2^* = \zeta_2(p,R) = \frac{R}{2p_2}$ et donc $u = \frac{R^2}{4p_1p_2}$

Résolvons le problème suivant pour obtenir les fonctions de demande Hicksiennes, le problème du consommateur est alors de minimiser la dépense compte tenu de son utilité :

$$\min_{x_1,x_2,\lambda} \ L = p_1x_1 + p_2x_2 - \lambda(x_1x_2 - u)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_1} = p_1 - \lambda x_2 = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = p_2 - \lambda x_1 = 0 \\ \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1x_2 - u = 0 \end{cases}$$

De 1) et 2) : $\lambda = \frac{p_1}{x_2} = \frac{p_2}{x_1}$ donc $x_2 = x_1\frac{p_1}{p_2}$

on remplace dans 3) :$x_1x_1\frac{p_1}{p_2} = u$ soit $x_1 = h_1(p,u) = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}u}$ et $x_2 = h_2(p,u) = \sqrt{\frac{p_1}{p_2}u}$

$\frac{\partial \zeta_1(p,R)}{\partial p_1} = -\frac{R}{2p_1^2}$

$\frac{\partial h_1(p,U)}{\partial p_1} = -\frac{1}{2p_1^{\frac{3}{2}}}\sqrt{p_2u} = -\frac{R}{4p_1^2}$, avec $u = \frac{R^2}{4p_1p_2}$

$\frac{\partial \zeta_1(p,R)}{\partial R}x_1(p,R) = \frac{1}{2p_1}.\frac{R}{2p_1}$

... et $-\frac{R}{2p_1^2} = -\frac{R}{4p_1^2} - \frac{R}{4p_1^2}$, l'équation de de Slutsky est bien vérifiée .

Pour une variation très petite de prix (ce n'est pas le cas de l'exemple ci-dessous!) on pourra utiliser la version suivante de l'équation de Slutsky :

$d\zeta_s(p,R) = \dfrac{\partial h_s(p,U)}{\partial p_r}dp_r - \dfrac{\partial \zeta_s(p,R)}{\partial R}x_r(p,R)dp_r$

Sinon on utilise les fonctions ci-dessus pour décomposer l'effet prix .

Exemple :

Reprenons l'exemple 1, avec $p_1 = 4$ et $p_2 = 5$ et un revenu R de 100, on obtient $x_1^* = 12.5$ et $x_2^* = 10$, soit une utilité de 125 .

Supposons que le prix de x_1 augmente de 1 euros , soit $p_1 = 5$.

$h_1(5,125) = \sqrt{125} = 11.18$ et $h_2(5,125) = \sqrt{125} = 11.18$. On utilise ici les demandes compensées pour mesurer l'effet de substitution : $(12,5;10) \mapsto (11.18;11.18)$

Avec $p_1 =$ et $p_2 = 5$ et un revenu R de 100, on obtient $x_1^* = 0$ et $x_2^* = 10$ et $(11.18;11.18) \mapsto (10;10)$ mesure l'effet revenu .

• Il est aussi possible de définir les fonctions d'utilité indirectes $v(p,R) = u(x_i(p,R))$, fonction des prixp_i et du revenu R , cette fonction s'obtient en substituant les fonctions de demande marshalienne aux arguments de la fonction u.

Dans l'exemple précédent, $v = \dfrac{R^2}{4p_1p_2}$

$\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_i}\dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}$ (Règle de la chaîne) .

On se rappelle lors de la résolution du programme de maximisation par la méthode de Lagrange que : $\lambda = \dfrac{1}{p_i}.\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ donc :

$\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_j} = \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial p_j}$

En différenciant la relation $\displaystyle\sum_{1=1}^{n} p_i x_i = R$ par rapport à p_j, on obtient : $x_j + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0$

Soit $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_j} = -\lambda x_j$

Maintenant si l'on refait pareil mais en différenciant par rapport au revenu, $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R} = \lambda \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial R}$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial R} = 1$

d'où $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R} = \lambda$ et on en déduit l'identité de Roy :

$$x_j = -\frac{\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_j}}{\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R}}$$

Reprenons l'exemple 1 : $u(x_1,x_2) = x_1x_2$, $x_1^* = \dfrac{R}{2p_1}$ et $v = \dfrac{R^2}{4p_1p_2}$

$\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_1} = -\dfrac{R^2}{4p_1^2p_2}$ et $\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R} = \dfrac{2R}{4p_1p_2}$

et donc $-\dfrac{\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial p_1}}{\dfrac{\partial v(p,R)}{\partial R}} = \dfrac{R}{2p_1}$ qui est bien l'expression de x_1

• A propos d'élasticité.

Pour mesurer la plus ou moins grande sensibilité de la demande au revenu et aux prix, on se réfère généralement à la notion d'élasticité.

On appelle élasticité revenu de la demande en bien i, le rapport de la variation relative de la demande de bien i et de la variation relative du revenu, soit :

$$\nu_i = \frac{\dfrac{dx_i(p,R)}{x_i}}{\dfrac{dR}{R}} = \frac{dx_i}{dR}\frac{R}{x_i}$$

Pour des petites variations du revenu, cette élasticité peut se calculer par les dérivées partielles :$\nu_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial R}\dfrac{R}{x_i}$

Soit q_i, le coefficient budgétaire du bien i qui mesure la part du revenu du consommateur consacrée à l'achat de bien i :

$q_i = \dfrac{p_i x_i(p,R)}{R}$

Dérivons cette expression : $\dfrac{\partial q_i}{\partial R} = \dfrac{p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial R} R - p_i x_i}{R^2}$

Si le résultat obtenu est positif, ce qui signifie que la part du revenu consacré à ce type de bien augmente avec le revenu, ce sont des biens de luxe , cela se traduit par $\dfrac{\partial x_i}{\partial R} R - x_i > 0$ soit $\nu_i > 1$.
$\nu_i = 1$ caractérise des biens dont le coefficient budgétaire ne varie pas sensiblement avec le revenu, ce sont des biens normaux et $\nu_i < 1$ caractérise les biens de 1ère nécessité.

On appelle élasticité prix directe de la demande en bien i, le rapport de la variation de la demande de bien i et de la variation du prix du bien i, soit (pour de petites variations) :

$$\mu_i = \frac{\dfrac{dx_i(p, R)}{x_i}}{\dfrac{dp_i}{p_i}} = \frac{dx_i}{dR} \frac{R}{x_i} = \frac{\partial x_i}{\partial p_i} \frac{p_i}{x_i}$$

Considérons la dépense du consommateur en bien i : $D_i = p_i x_i(p, R)$
Dérivons cette expression : $\dfrac{\partial D_i}{\partial p_i} = x_i + p_i \dfrac{\partial x_i}{\partial p_i} = x_i(1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial p_i} \dfrac{p_i}{x_i}) = x_i(1 + \mu_i)$
...et cette quantité est positive si $\mu_i > -1$, négative sinon.

On a donc 2 types de biens. Ceux dont l'élasticité prix directe est faible en valeur absolue ($\mu_i > -1$). Pour ces biens, la hausse du prix ne réduit que faiblement la demande de sorte que la dépense augmente. Les produits alimentaires et l'énergie font partie des biens dont la demande est faiblement élastique par rapport au prix.
On a d'autre part les biens dont la demande est fortement élastique au prix ($\mu_i < -1$). Une hausse des prix conduit alors à une forte réduction de la consommation. Ce sont par exemple de nombreux biens de loisir ou de culture.

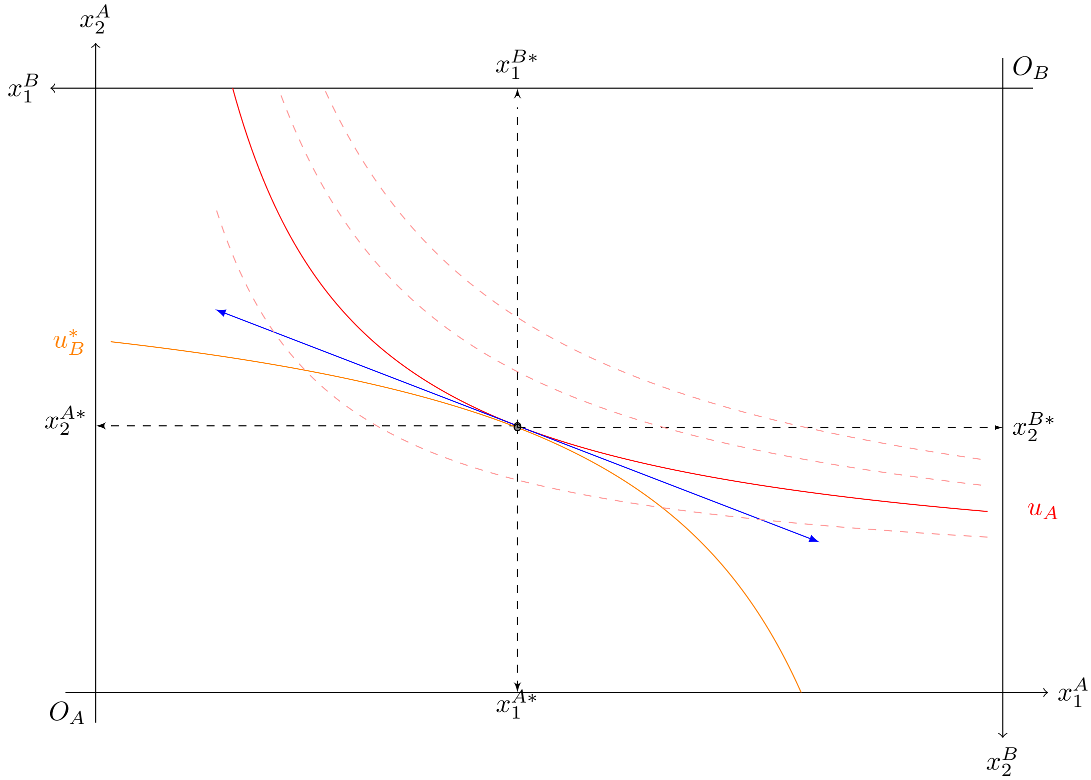
• Vers la théorie des jeux, l'optimum de Paretto.
Une distribution de certains produits entre différents individus est optimale s'il n'existe aucune autre façon de procéder qui puisse rendre chaque individu plus heureux ou, au minimum, qui puisse rendre certains plus heureux sans léser les autres.
L'utilité u_B^* de l'individu B étant fixée ainsi que les quantités totales x_1 et x_2 des biens 1 et 2, peut on maximiser l'utilité de l'individu A sans léser l'individu B ?
Le problème est de maximiser $u_A(x_1^A, x_2^A)$ sous les contraintes $u_B(x_1^B, x_2^B) = u_B^*$, $x_1^A + x_1^B = x_1$ et $x_2^A + x_2^B = x_2$
Ce qui revient à maximiser le lagrangien : $L = u_A(x_1^A, x_2^A) - \alpha(u_B(x_1^B, x_2^B) - u_B^*) - \beta(x_1^A + x_1^B - x_1) - \gamma(x_2^A + x_2^B - x_2)$....soit sept variables ! !
Regardons les quatre premières équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1^A} = \dfrac{\partial u_A}{\partial x_1^A} - \beta = 0 & (1) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x_1^B} = \alpha \dfrac{\partial u_B}{\partial x_1^B} - \beta = 0 & (2) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x_2^A} = \dfrac{\partial u_A}{\partial x_2^A} - \gamma = 0 & (3) \\[2ex] \dfrac{\partial L}{\partial x_2^B} = \alpha \dfrac{\partial u_B}{\partial x_2^B} - \gamma = 0 & (4) \end{cases} .$$

Eliminons α, β et γ ,il vient :

$$\frac{\dfrac{\partial u_A}{\partial x_1^A}}{\dfrac{\partial u_A}{\partial x_2^A}} = \frac{\dfrac{\partial u_B}{\partial x_1^B}}{\dfrac{\partial u_B}{\partial x_2^B}}$$

...La condition d'optimalité est l'égalisation des TMS des individus relativement à toutes les paires possibles de biens existants !
.... situation que l'on représente généralement à l'aide du diagramme suivant que l'on appelle boîte d'Edgeworth



....permettant de déterminer graphiquement les solutions x_1^{A*} , x_2^{A*} , x_1^{B*} et x_2^{B*} du problème !

ANNEXE 0

Soit $f(x,y)$ une fonction de deux variables , ou plus , on appelle dérivée partielle de f par rapport à x au point (a,b) la dérivée $f'_{y=b}(a)$, on dérive f en considérant momentanément y comme une constante. On notera $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)$.

On appellera dérivée partielle de f par rapport à y au point (a,b) la dérivée $f'_{x=a}(b)$, noté $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b)$.

Considérons la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$.

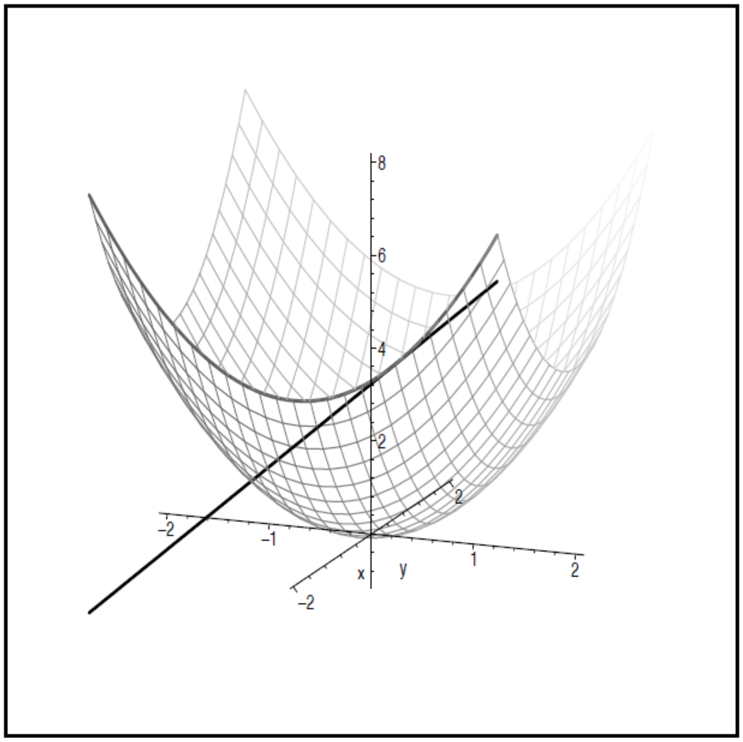
La dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$ se comprend géométriquement de la façon suivante :

Tout d'abord nous considérons la coupe de la surface représentative de f par le plan $y=-2$.

Nous obtenons alors une parabole (d'équation $z=x^2+4$). C'est la courbe représentative de $f_{y=-2}(x)$.

Ensuite, nous regardons le coefficient directeur de la tangente à cette parabole en $x=1$. C'est $f'_{y=-2}(1)=\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,-2)$.

Dans notre cas, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b)=2a$ et pour $a=1$ ce coefficient est égal à 2.



• On note alors la différentielle de f de la manière suivante : $df=\dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$.

Si f est une fonction à valeur dans $\mathbb{R}^n$, on note sa différentielle sous forme de matrice, appelée matrice jacobienne de f et notée $J_f(a)$.

$J_f(a)=(\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a))_{(i,j)\in[1,n]\times[1,p]}$

Exemple : $f(x,y)=(x^2+y,xy)$

$$J_f(1,2)=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x}(1,2) & \dfrac{\partial f_1}{\partial y}(1,2)\\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x}(1,2) & \dfrac{\partial f_2}{\partial y}(1,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x(1,2) & 1(1,2)\\ \\ y(1,2) & x(1,2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ \\ 2 & 1\end{bmatrix}$$

• Nous avons l'approximation suivante :$f(x+\delta_x,y+\delta_y)\approx f(x,y)+\dfrac{\partial f}{\partial x}\delta_x+\dfrac{\partial f}{\partial y}\delta_y$.

Soit $f(x,y)=3x^2-xy-y^2$, $f(1,3)=-9$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}=6x-y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}=-x-2y$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,3)=3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(1,3)=-7$

Donc par exemple avec $\delta_x=0.01$ et $\delta_y=-0.02$: $f(1.01,2.98)=-9+3\times0.01-7\times0.02=-8.87$

• Un point (x_0,y_0) est dit stationnaire si : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=0$

Si f possède un extremum relatif en (x_0,y_0), alors (x_0,y_0) est un point stationnaire (condition nécessaire)

• Règle de la chaîne : Soient f et g deux fonctions différentiables et $g \circ f$ leur composée : $g \circ f(a) = g(f(a))$, alors :
$\frac{\partial g \circ f}{\partial x_i}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(a) \frac{\partial g}{\partial y_k}(f(a))$, la variable de g est notée y pour éviter les confusions.

Exemple : Soit $h(x, y) = g(xy, \frac{x}{y})$, avec $g(x, y) = x^2 + 3y$, déterminer $dh(a, b)$

ici $f_1(x, y) = xy$ et $f_2(x, y) = \frac{x}{y}$

$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f_1}{\partial x}(a, b) \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a, b)) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(a, b) \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(a, b))$

$= y(a, b).2x(ab, \frac{a}{b}) + \frac{1}{y}(a, b).3(ab, \frac{a}{b}) = b.2ab + \frac{1}{b}.3 = 2ab^2 + \frac{3}{b}$

$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f_1}{\partial y}(a, b) \frac{\partial g}{\partial y_1}(f(a, b)) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(a, b) \frac{\partial g}{\partial y_2}(f(a, b))$

$= x(a, b).2x(ab, \frac{a}{b}) - \frac{x}{y^2}(a, b).3(ab, \frac{a}{b}) = a.2ab - \frac{a}{b^2}.3 = 2a^2b - \frac{3a}{b^2}$.

• Si f possède des dérivées partielles et si ces deux fonctions possèdent des dérivées partielles on dit que f possède des dérivées partielles du second ordre.

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y})$...

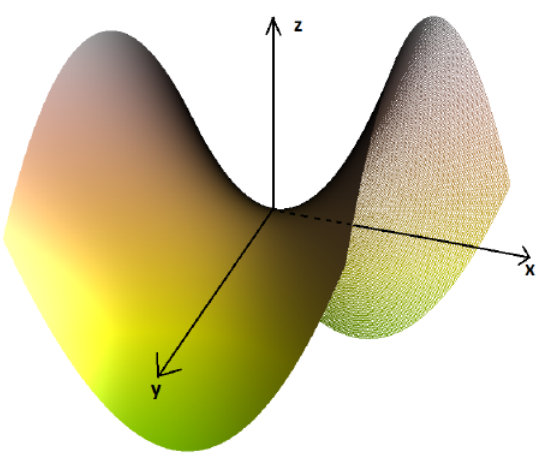
....Si f possède des dérivées partielles du second ordre au voisinage de (x_0, y_0) et si les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues en (x_0, y_0) alors elles sont égales.

....et une fonction est dite convexe si et seulement si : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}. \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \geq 0$ ce qui correspond à :
$f(t(x_0, y_0) + (1 - t)(x_1, y_1)) \leq tf(x_0, y_0) + (1 - t)f(x_1, y_1)$ pour tout $(x_0, y_0); (x_1, y_1)$ de l'ensemble de définition .

•Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$ et que f soit une fonction de deux variables possédant des dérivées partielles du second ordre continues.

Soient $r_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)$, $s_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$ et $t_0 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)$ alors :
Si $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 > 0$, alors f admet en (x_0, y_0) un minimum local.
Si $r_0t_0 - s_0^2 > 0$ et $r_0 < 0$, alors f admet en (x_0, y_0) un maximum local.
Si $r_0t_0 - s_0^2 < 0$, alors (x_0, y_0) est un point selle.
Si $r_0t_0 - s_0^2 = 0$, alors on ne peut rien conclure.

Si f est convexe, tout point stationnaire est un minimum local.



Exemple de point selle avec $f(x, y) = x^2 - y^2$

ANNEXE 1

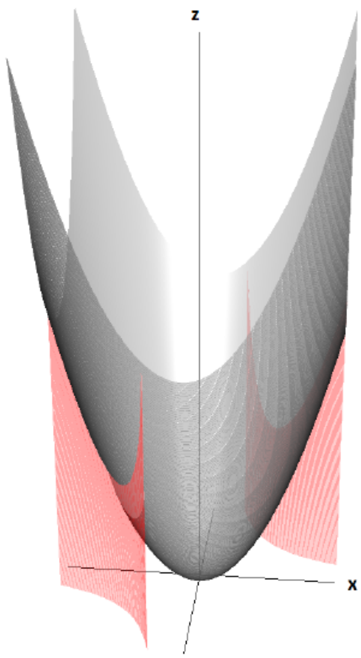
Méthode de Lagrange : Cette technique est utile entre autres pour résoudre les problèmes d'optimisation sous contrainte.

Si P_0 est un point d'extremum local de f sur $\{(x,y)|g(x,y)=0\}$ alors df et dg seront proportionnelles (Il existe λ tel que $df=\lambda dg$)

La méthode consiste donc à introduire une inconnue supplémentaire - appelée multiplicateur de Lagrange - par contrainte. On forme ensuite une combinaison linéaire de la fonction et des contraintes, où les coefficients des contraintes sont les multiplicateurs de Lagrange. Le problème passe ainsi d'un problème d'optimisation avec contrainte à un problème non contraint, qui peut être résolu par une méthode adaptée.

Exemple 1

On cherche ici à minimiser la fonction $f(x,y)=x^2+y^2$ sous la contrainte $xy=1$. On posera $g(x,y)=xy-1$



Ayant une seule contrainte, on ajoute un seul multiplicateur de Lagrange :

$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda\times g(x,y)$

Le problème revient maintenant à minimiser le Lagrangien $L(x,y,\lambda)=x^2+y^2-\lambda(xy-1)$

Pour rappel, si une fonction de plusieurs variables s'annule en un point alors en ce point toutes les dérivées partielles doivent être nulles, donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} & = & 2x-\lambda y & = & 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} & = & 2y-\lambda x & = & 0 & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} & = & xy-1 & = & 0 & (3) \end{cases} .$$

(1) et (2) nous donne : $x^2=y^2$

L'équation (3) nous donne : $x^2=1$, et finalement $\lambda=2$

Les deux points stationnaires sont $(1,1)$ et $(-1,-1)$, et comme L est convexe il s'agit bien de minima.

Exemple 2

Soit la fonction de production $f(y_1,y_2,y_3)=y_1-2y_2^{\frac{1}{3}}y_3^{\frac{1}{3}}=0$ où y_1 est un output dont le prix est p_1 et y_2, y_3 des inputs dont les prix sont p_2 etp_3.

Le problème du producteur est de maximiser $p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3$ sous la contrainte $y_1-2y_2^{\frac{1}{3}}y_3^{\frac{1}{3}}=0$

Ce qui revient à maximiser le lagrangien : $L=p_1y_1+p_2y_2+p_3y_3-\lambda(y_1-2y_2^{\frac{1}{3}}y_3^{\frac{1}{3}})$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial y_1} & = & p_1 - \lambda & = & 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_2} & = & p_2 + \dfrac{2}{3}\lambda y_2^{\frac{-2}{3}} y_3^{\frac{1}{3}} & = & 0 & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y_3} & = & p_3 + \dfrac{2}{3}\lambda y_2^{\frac{1}{3}} y_3^{\frac{-2}{3}} & = & 0 & (3) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} & = & y_1 - 2y_2^{\frac{1}{3}} y_3^{\frac{1}{3}} & = & 0 & (4) \end{cases} .$$

(2) et (3) donnent $\dfrac{p_2}{p_3} = \dfrac{y_3}{y_2}$, en remplaçant dans (3) : $p_3 = -\dfrac{2}{3} p_1 (\dfrac{p_3}{p_2} y_3)^{\frac{1}{3}} y_3^{\frac{-2}{3}}$

Soit $p_3 = -\dfrac{2}{3}(\dfrac{p_3^{\frac{1}{3}}}{p_2^{\frac{1}{3}}})\dfrac{1}{y_3^{\frac{1}{3}}}$ et finalement $y_3^* = -\dfrac{8}{27}\dfrac{p_1^3}{p_3^2 p_2}$

donc $y_2^* = -\dfrac{8}{27}\dfrac{p_1^3}{p_2^2 p_3}$ et en remplaçant dans (4) : $y_1^* = 2(\dfrac{8}{27}\dfrac{p_1^3}{p_2^2 p_3})^{\frac{1}{3}}(\dfrac{8}{27}\dfrac{p_1^3}{p_3^2 p_2})^{\frac{1}{3}} = \dfrac{8p_1^2}{9p_2 p_3}$

On obtient ainsi les fonctions d'offre nette y_1^*, y_2^* et y_3^*.