EXERCICES CORRIGES

Exercice 1. les bases

Déterminer la solution de chacun des jeux simultanés suivants :

a) Joueur 2

		gauche	milieu	droite
	haut	$2;3$	$1;5$	$2;4$
Joueur 1	centre	$5;2$	$4;-1$	$-2;-2$
	bas	$3;0$	$2;1$	$-1;3$

b) Joueur 2

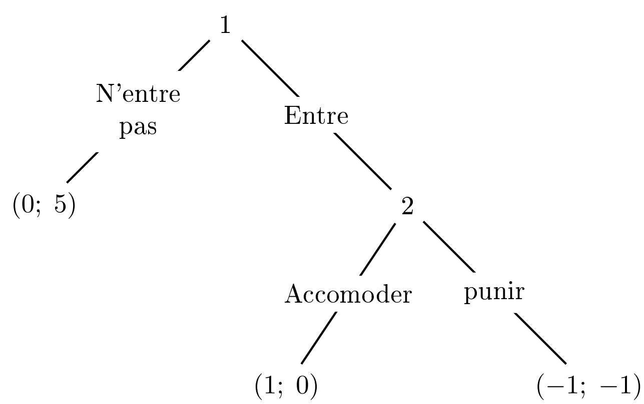
		E	F	G	H
	A	$2;2$	$2;0$	$22;8$	$22;8$
Joueur 1	B	$10;2$	$26;10$	$14;0$	$30;8$
	C	$0;2$	$4;0$	$16;10$	$20;8$
	D	$8;2$	$28;8$	$8;2$	$28;8$

c) Joueur 2

		G	m	D
	h	$1;1$	$0;2$	$0;4$
Joueur 1	M	$0;2$	$5;0$	$1;6$
	B	$0;2$	$7;1$	$2;1$

Exercice 2. Le nouvel entrant

Une firme (joueur 1) considère l'entrée sur un marché où il existe déjà une firme (joueur 2). Si l'entrée à lieu la firme installée a le choix entre accommoder l'entrée ou punir l'entrant potentiel pour l'évincer du marché. L'arbre du jeu est le suivant :



a) Déterminer les équilibres parfaits de ce jeu.

b) La firme installée a maintenant la possibilité de mettre en place une capacité de production supplémentaire qui va lui imposer un coût supplémentaire de 3 uniquement dans le cas ou elle n'utilise pas cette capacité pour combattre l'entrée. Cette capacité est parfaitement observée par l'entrant potentiel.

   (1) Donner l'arbre de ce jeu.

   (2) Déterminer la nouvelle solution de ce jeu, conclure.

Exercice 3. Exemple historique emprunté à Cournot

Le monopole et le duopole :

A la mort de leur père , deux frères héritent pour moitié d'un terrain sur lequel se situent deux sources de sorte qu'une branche de la source jaillit dans le terrain du premier, et l'autre dans le terrain du deuxième.

Les deux frères décident d'exploiter la source comme s'ils ne formaient qu'un monopole, et le coût d'exploitation à chaque branche de la source s'élève à : $C(q) = \dfrac{1}{3200} + \dfrac{q^2}{2}$ où q est le nombre de litres (en milliers de litres) d'eau embouteillée à une branche.

S'ils décident de vendre une quantité Q d'eau minérale, le prix $P(Q)$ auquel cette quantité pourra être écoulée auprès de la multitude d'acheteurs est donné par l'expression : $1 - Q$

a) Dans ces conditions, quelle quantité d'eau vont-ils choisir de vendre ?

b) Supposons maintenant qu'un conflit surgisse entre les deux frères, qui décident dès lors de " se retirer sur leurs terres ", et de vendre séparément, sans consultation préalable, l'eau minérale qui jaillit dans leur terrain. Quelles quantités q_1 et q_2 les deux frères vont-ils choisir de vendre chacun ?

Exercice 4. La stratégie des communaux

On considère N fermiers qui peuvent chacun produire à un coût nul autant de blé qu'ils le désirent. Si le $k^{\text{ième}}$ fermier produitq_k, la quantité totale produite est $Q = q_1 + q_2 + ... + q_N$.

Le prix du blé est déterminé par $p = e^{-Q}$.

a) Faire le tableau de variation de la fonction $f(x) = xe^{-x}$ pour $x \geq 0$.

b) En utilisant le point précédent, montrer que la stratégie qui consiste à produire une unité de blé est dominante pour chaque fermier.

En déduire que le profit correspondant pour chaque fermier est e^{-N}.

c) Supposons que les fermiers se mettent d'accord pour que chacun produise $\dfrac{1}{N}$ unité de blé. Toujours en se basant sur le premier point, montrer que le profit total est alors maximal.

Vérifier que le profit de chaque fermier est $\dfrac{e^{-1}}{N}$.

d) Un tel accord peut-il être respecté en l'absence d'un contrat explicite ?

Exercice 5. La conquête

Deux armées opposées sont sur le point de conquérir une île.

Chaque général peut choisir soit "attaquer" A, soit "ne pas attaquer" NA.

Chaque armée est soit "puissante", noté s, soit "faible", noté w, avec probabilité égale et le type de chaque armée n'est connu que de l'armée concernée.

La conquête de l'île procure une valeur égale à 10.

Une armée peut conquérir l'île soit en attaquant seule soit en n'attaquant pas seule sachant qu'elle-même est du type "puissante" et l'autre du type "faible".

Aucune des deux armées ne peut conquérir l'île si elles attaquent toutes les deux et sont du même type.

En attaquant, une armée supporte un coût égal à 3 si elle est du type "puissante" et de 5 si elle est du type "faible" .

En attaquant seule, une armée ne supporte aucun coût.

a) Mettre ce jeu sous la forme normale.

b) Déterminer l'équilibre de Nash de ce jeu .

Exercice 6. Le cadeau

Archibald, Irma et Nestor veulent faire un cadeau à leur camarade Bianca qui part en congé de maternité. Ils doivent mettre une somme d'argent dans une enveloppe scellée et donner cette enveloppe à leur secrétaire qui se chargera d'acheter le cadeau.

Archibald, Irma et Nestor disposent, respectivement, d'un montant maximal de 100, 200 et 300 euros à consacrer à ce cadeau. Les préférences d'Archibald, Irma et Nestor pour le bien privé (dont la quantité est désignée par x) et la valeur du cadeau donné à Bianca (désignée par Z) sont représentées, respectivement, par les fonctions d'utilité U_A, U_I et U_N suivantes :

$U_A(x, Z) = U_I(x, Z) = \sqrt{xZ}$ et $U_N(x, Z) = 2\sqrt{Z} + x$

a) Quelle contribution au cadeau de Bianca choisiront de faire Archibald, Irma et Nestor à l'équilibre de Nash ?

Pour les deux exercices suivants on commencera par lire "Actualisation d'un flux de gains" en ANNEXE 2.

Exercice 7. Le dilemme du prisonnier

Deux individus arrêtés par la police sont intérrogés séparément et ont le choix entre nier le vol (stratégie N) ou dénoncer leur complice (stratégie D), la matrice des gains représentant leur situation qui résulte des années de prison auxquelles ile seront condamnés est la suivante :

Joueur 2

		N	D
Joueur 1	N	$3;3$	$-1;4$
	D	$4;-1$	$0;0$

(1) a) Déterminer les solutions de ce jeu .
b) Cet solution est-elle optimale au sens de Paréto

(2) Le jeu ci-dessus est maintenant répété de manière infinie, la stratégie commune pour chaque joueur est la suivante :
"Jouer N tant que l'autre joue N et si l'autre joue D jouer D jusqu'à la fin du jeu". ("trigger sytrategy", stratégie de déclenchement)
Montrer que dans le jeu répété, la solution de coopération peut devenir un résultat d'équilibre.

(3) Le jeu ci-dessus est répété de manière infinie, la stratégie commune pour chaque joueur est maintenant la suivante :
"Je commence par jouer N et dans chaque période ultérieure je jouerai ce que l'autre joueur a fait dans la période précédente". (" tit for tat", oeil pour oeil)
Montrer que dans le jeu répété, la solution de coopération reste, avec cette autre stratégie, un résultat d'équilibre.

Exercice 8. Emergence du Cartel

On reprend ici la configuration de l'exercice 3, chaque joueur peut adopter la stratégie M ," jouer le monopole" ou C, "jouer Cournot".

Pour rappel , si les deux joueurs joue M on a $q_i = \dfrac{1}{5}$ et $u_i = \dfrac{319}{3200}$ et si les deux joueurs jouent C alors $q_i = \dfrac{1}{4}$ et $u_i = \dfrac{299}{3200}$.

a) Étudier la situation ou les deux joueurs jouent des stratégies différentes (L'un joue M, l'autre C)
b) Représenter la forme normale du jeu où chaque joueur à le choix entre jouer les deux stratégies et déterminer la solution de ce jeu.
c) On suppose que le jeu est répété une infinité de fois (chaque jour les joueurs choisissent leur stratégie), montrer que la stratégie "jouer M tant que l'autre joue M et jouer infiniment C si l'autre joueur dévie " peut devenir une solution du jeu .
Une telle stratégie à déclenchement est appelée "trigger strategy".

CORRECTIONS

- Exercice 1 :

a) La stratégie "bas" du joueur 1 est dominée par la stratégies "$\frac{1}{2}$ centre+$\frac{1}{2}$ haut", le joueur 1 ne jouera donc pas "bas".

Dans le jeu réduit où 1 ne joue pas "bas", la stratégie "droite" du joueur 2 est dominée strictement par la stratégie "$\frac{2}{3}$ milieu + $\frac{1}{3}$ gauche", le joueur 2 ne joue pas "droite".

Puis la stratégie "centre" du joueur 1 domine dans le jeu réduit, sa stratégie "haut". Le joueur 1 choisira donc "centre". Sachant cela, le joueur 2 choisira "gauche". ("centre,gauche") est donc l'unique combinaison de stratégies qui survit à une procédure d'élimination de stratégies (mixtes) dominées.

b) On remarque d'abord que, pour le joueur 2, "E" est strictement dominée par "H", on élimine "E" du jeu.

Pas de possibilité d'exhiber une nouvelle stratégie dominée pour l'un des deux joueurs, on cherche alors un équilibre de Nash :

Etablissons les fonctions de meilleure réponse de chaque joueur :

$r_1(F) = D$, $r_1(G) = A$, $r_1(G) = A$ et $r_1(H) = B$

$r_2(A) = G, H$, $r_2(B) = F$, $r_2(C) = G$ et $r_2(D) = F, H$

....et les équilibres de Nash en stratégies pures sont ("D" ; "F") et ("A" ; "G")

c) La stratégie m du joueur 2 est dominée par $\frac{1}{2}G + \frac{1}{2}D$ qui donne un vecteur de gain $(2.5, 4, 1.5)$, elle est donc éliminée du jeu tout comme la stratégie M du joueur 1 dominée par $\frac{1}{4}h + \frac{3}{4}B$. On obtient le jeu réduit suivant :

		Joueur 2	
		G	D
Joueur 1	h	$1; 1$	$0; 4$
	B	$0; 2$	$2; 1$

Pas d'équilibre de Nash en stratégie pure, on cherche une solution en stratégie mixte en se souvenant que chaque joueur doit être nécessairement indifférent entre toutes les stratégies pures auxquelles la stratégie mixte attribue une probabilité strictement positive.

Soit $(h(q); B(1-q))$ et $(G(p); D(1-p))$ les stratégies mixtes des deux joueurs, on doit vérifier :

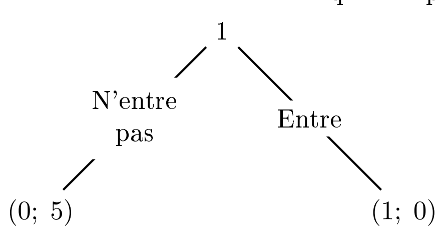
Pour le joueur 1 : $1.p + 0.(1-p) = 0.p + 2.(1-p)$ soit $p = \frac{2}{3}$

Et pour le joueur 2 : $1.q + 2.(1-q) = 4.q + 1.(1-)$ soit $q = \frac{1}{4}$

Finalement, le joueur 1 ne joue jamais M, joue h une fois sur quatre et B trois fois sur quatre. Le joueur 2 ne joue jamais m, joue G deux fois sur trois et D une fois sur trois.

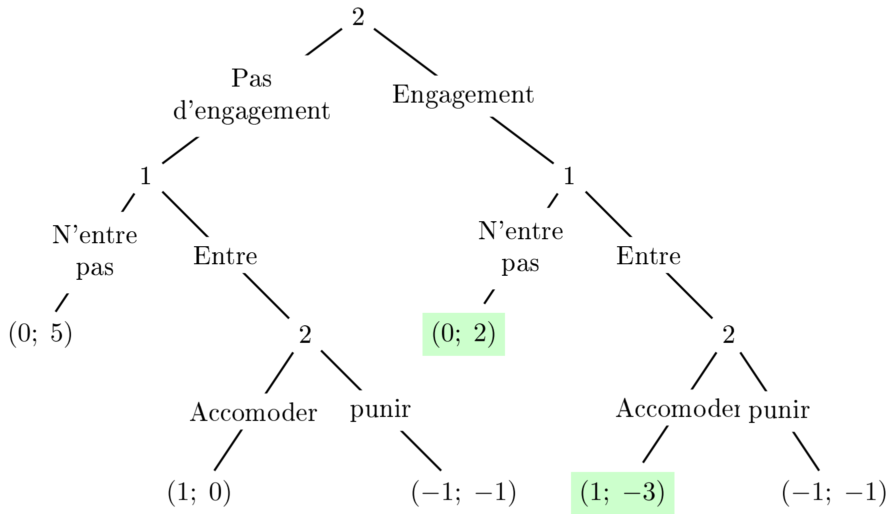
- Exercice 2 :

a) Par induction à rebours on détermine le seul équilibre parfait à partir du sous jeu suivant :

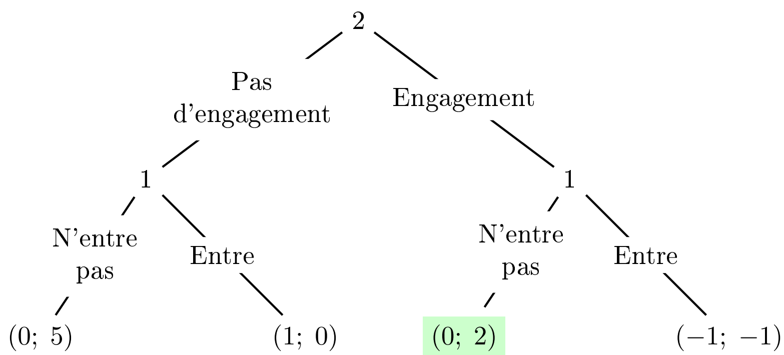


La solution est ("Entrer", "Accomoder") qui correspond aux gains $(1; 0)$.

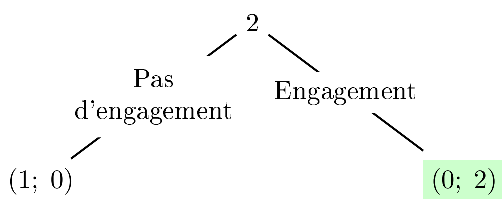
b) Si la firme installée met en place une capacité de production supplémentaire, le coût pèse uniquement dans le cas où elle ne combat pas l'entrée.



Par induction à rebours le jeu devient :



Puis



....et finalement le joueur 2 choisira la stratégie ("engagement", "punir" si Entre) et le joueur 1 choisit ("N'entre pas") ce qui aboutit aux gains $(0; 2)$

L'engagement à permis au joueur 2 de rendre sa menace de combattre l'entrée crédible et donc de bloquer effectivement l'entrée . Malgré un coût de l'engagement la firme installée garde son monopole et améliore sa situation à l'équilibre puisque son profit passe de 0 à 2.

- Exercice3 :

a) $u(Q) = (1-Q)Q - 2C(\frac{Q}{2}) = -\frac{5}{4}Q^2 + Q - \frac{1}{1600}$

On cherche à résoudre le programme suivant : $\max\limits_{Q}\ u(Q) = -\frac{5}{4}Q^2 + Q - \frac{1}{1600}$

u étant dérivable , la condition du premier ordre implique :

$\frac{d}{dQ}u(Q) = -\frac{5}{2}Q + 1 = 0$, soit $Q = \frac{2}{5}$.

Le profit pour chaque frère est alors $\frac{1}{2}(\frac{1}{5} - \frac{1}{1600}) = 0.0996$, et le prix du marché : $\frac{3}{5}$

b) $P = 1 - q_1 - q_2$, et pour le joueur 1 : $u_1(q_1) = (1 - q_1 - q_2)q_1 - \frac{q_1^2}{2} - \frac{1}{3200} = -\frac{3}{2}q_1^2 + (1-q_2)q_1 - \frac{1}{3200}$.

La solution du programme $\max\limits_{q_1}\ u_1(q_1)$ impliquant $\frac{d}{dq_1}u_1(q_1) = 0$ donne $q_1 = \frac{1-q_2}{3}$

On obtiendra par le même raisonnement $q_2 = \dfrac{1-q_1}{3}$

Les fonctions de meilleure réaction de Cournot des deux joueurs sont les solutions du système :

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{1-q_2^*}{3} \\ q_2^* = \dfrac{1-q_1^*}{3} \end{cases}$$

Soit $q_1^* = q_2^* = \dfrac{1}{4}$

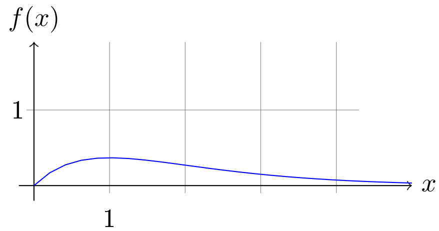
Le profit pour chaque frère, en baisse, est alors $\dfrac{3}{32} - \dfrac{1}{3200} = 0.0934$, et le prix du marché :$\dfrac{1}{2}$

Le prix du marché a diminué du fait de la non coopération des deux frères !

- Exercice 4 :

a) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, positif sur $[0;1]$ et négatif sur $[1;+\infty[$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



b) Le profit u_k du $k^{\text{ième}}$ fermier, en fonction de sa production q_k et de la production des autres fermiers est : $q_k\ e^{(-q_k+q_{-k})}$ où q_{-k} est la quantité totale produite par les autres fermiers qui du point de vue du $k^{\text{ième}}$ fermier, qui cherche à déterminer q_k pour maximiser u_k, apparaît dans le calcul comme une constante positive.

$\max\limits_{q_k}\ q_k\ e^{(-q_k+q_{-k})} = \max\limits_{q_k}\ e^{-q_{-k}} q_k\ e^{-q_k} = \max\limits_{q_k}\ C q_k\ e^{-q_k}$

or d'après le tableau ci-dessus ce max est atteint pour $q_k = 1$

$q_k = 1$ est donc une stratégie dominante pour le fermier k. Si chaque fermier produit une unité, le prix est alors e^{-N} et le profit de chacun est $1.e^{-N} = e^{-N}$.

c) Considérons maintenant le profit total Qe^{-Q} avec $Q = q_1 + q_2 + ... + q_N$, ce profit est maximal pour $Q = 1$ et $Q = 1$ est atteint si chacun produit $\dfrac{1}{N}$ unité de blé.

Le profit de chaque fermier est alors $\dfrac{1}{N}.e^{-1} = \dfrac{e^{-1}}{N}$.

Remarque : dés que $N > 2$, $\dfrac{e^{-1}}{N}$ est bien supérieur à e^{-N} (10 fois plus pour N=5 par exemple !)

d) Un tel accord ne peut pas être respecté en l'absence d'un contrat explicite.

Quoi que fassent les autres fermiers, le fermier k a intérêt à choisir sa stratégie dominante $q_k = 1$ pour maximiser son profit en effet :

Si le fermier k passe de $q_k = \dfrac{1}{N}$ unité de blé à $q_k = 1$ la quantité totale produite devient

$Q = \dfrac{1}{N} + ...\dfrac{1}{N} + 1 + \dfrac{1}{N} + ...\dfrac{1}{N} = 1 + \dfrac{N-1}{N}$

et u_k devient $u_k = 1.e^{-(1+\frac{N-1}{N})} = e^{-1}e^{-\frac{N-1}{N}}$ et $\frac{N-1}{N} < 1$ donc $e^{-\frac{N-1}{N}} > e^{-1}$ et $\dfrac{1}{N} < e^{-1}$ dés que N>3.

L'"accord" n'est pas ici auto-contraignant, ce n'est pas un équilibre.

- Exercice 5 :

a) Commençons par définir l'espace des stratégies de l'armée i .

s_{i1} : Attaquer si type "puissant" $-s$; Attaquer si type "faible" $-w$, noté $(A/s; A/w)$.

s_{i2} : Attaquer si type "puissant" $-s$; Ne pas attaquer si type "faible" $-w$, noté $(A/s; NA/w)$

s_{i3} : Ne pas attaquer si type "puissant" $-s$; Attaquer si type "faible $-w$, noté $(NA/s; A/w)$

s_{i4} : Ne pas attaquer si type "puissant" $-s$; Ne pas attaquer si type "faible" $-w$, noté $(NA/s; NA/w)$.

On obtient ainsi la matrice des paiements suivante :

Joueur 2

Joueur 1		s_{21}				s_{22}				s_{23}				s_{24}			
		A/s		*A/w*		*A/s*		*NA/w*		*NA/s*		*A/w*		*NA/s*		*NA/w*	
s_{11}	*A/s*	**-3**	-3	**7**	-5	**-3**	-3	**10**	0	**10**	0	**7**	-5	**10**	0	**10**	0
	A/w	**-5**	7	**-5**	-5	**-5**	7	**10**	0	**10**	0	**-5**	-5	**10**	0	**10**	0
s_{12}	*A/s*	**-3**	-3	**7**	-5	**-3**	-3	**10**	0	**10**	0	**7**	-5	**10**	0	**10**	0
	NA/w	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0
s_{13}	*NA/s*	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0
	A/w	**-5**	7	**-5**	-5	**-5**	7	**10**	0	**10**	0	**-5**	-5	**10**	0	**10**	0
s_{14}	*NA/s*	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0
	NA/w	**0**	10	**0**	10	**0**	10	**0**	0	**0**	0	**0**	10	**0**	0	**0**	0

b) Méthode 1 :

Pour déterminer l'équilibre de Nash, on calcule les espérances de paiement de chaque joueur pour tous les profils de stratégies. Par exemple, pour le profil de stratégies (s_{11}, s_{21}) , le gain du joueur 1 est de :
-3 si les deux joueurs attaquent et sont du type s (la probabilité est de $\frac{1}{4}$) ;
-5 si les deux joueurs attaquent, le joueur 1 étant du type w et le joueur 2 du type s (la probabilité est de $\frac{1}{4}$) ;
7 si les deux joueurs attaquent, le joueur 1 étant du type s et le joueur 2 du type w (la probabilité est de $\frac{1}{4}$) ;
-5 si les deux joueurs attaquent et sont du type w (la probabilité est de $\frac{1}{4}$).

Pour ce profil, le paiement espéré du joueur 1 est donc $\dfrac{(-3-5+7-5)}{4} = -1.5$. Ce même calcul appliqué, à toutes les combinaisons de stratégies, permet d'obtenir la matrice des paiements suivante :

Joueur 1	Joueur 2	s_{21}	s_{22}	s_{23}	s_{24}
	s_{11}	**-1.5** ; -1.5	**3** ; 1	**5.5** ; -2.5	**10** ; 0
	s_{12}	**1** ; 3	**1.75** ; 1.75	**4.25** ; -1.25	**5** ; 0
	s_{13}	**-2.5** ; 5.5	**1.25** ; 4.25	**1.25** ; 1.25	**5** ; 0
	s_{14}	**0** ; 10	**0** ; 5	**0** ; 5	**0** ; 0

...et ce jeu admet les deux équilibres de Nash bayésiens : (s_{12}, s_{21}) et (s_{11}, s_{22})

Méthode 2, plus élégante.

Remarquons qu'avant de faire son choix, chacun des joueurs connaît son type . Donc, dans un équilibre de Nash bayésien (en stratégies pures), chaque joueur choisit une stratégie qui soit la meilleure réponse aux stratégies des autres joueurs (selon la distribution conditionnelle $f_{t_i}(t_{-i}$) et ce pour chacun des types t_i pouvant survenir.

En d'autres termes, chaque type t_i du joueur i est considéré comme si c'était un joueur à part entière cherchant à maximiser son utilité espérée étant donné sa distribution conditionnelle sur les stratégies des autres joueurs. Cette approche est qualifiée de "type-centered interpretation".

Pour chacun des deux joueurs, on détermine l'espérance de paiement lorsqu'il est du type s et lorsqu'il est du type w, l'espérance étant calculée par rapport à ses croyances.

Ainsi, lorsque le joueur 2 joue s_{21} , le joueur 1 obtient :

S'il est de type s : $\dfrac{1}{2}.(-3) + \dfrac{1}{2}.7 = 2$ s'il joue A et $\dfrac{1}{2}.0 + \dfrac{1}{2}.0 = 0$ s'il joue NA, donc il jouera A

S'il est de type w : $\dfrac{1}{2}.(-5) + \dfrac{1}{2}.(-5) = -5$ s'il joue A et $\dfrac{1}{2}.0 + \dfrac{1}{2}.0 = 0$ s'il joue NA, donc il jouera NA

Sa meilleure réponse à la stratégie s_{21} sera : Attaquer si s ; Ne pas attaquer si w , soit la stratégie s_{12} : $b_1(s_{21}) = s_{12}$

Des calculs similaires permettent d'obtenir :

$b_1(s_{21}) = s_{12}$, $b_1(s_{22}) = s_{11}$, $b_1(s_{23}) = s_{11}$ et $b_1(s_{24}) = s_{11}$

...La même démarche est appliquée au joueur 2 :

$b_2(s_{11}) = s_{22}$, $b_2(s_{12}) = s_{21}$, $b_2(s_{13}) = s_{21}$ et $b_2(s_{14}) = s_{21}$

l'équilibre de Nash bayésienest la solution du programme $b_1(s_2^*) = s_1^*$ et $b_2(s_1^*) = s_2^*$

Soit les deux équilibres de Nash bayésiens : (s_{12}, s_{21}) et (s_{11}, s_{22})

- Exercice 6 :

a) Pour trouver l'équilibre de Nash, il faut dabord trouver les fonctions de meilleure réponse de chacun des trois joueurs.

Les fonction de meilleure réponse sont définie comme étant la solution du programme suivant :

$\max\limits_{q_1} U_A = \sqrt{(100 - q_1)(q_1 + q_2 + q_3)}$ pour Archibald ;

$\max\limits_{q_2} U_I = \sqrt{(200 - q_2)(q_1 + q_2 + q_3)}$ pour Irma

$\max\limits_{q_3} U_N = 2\sqrt{(q_1 + q_2 + q_3)} + (300 - q_3)$ pour Nestor

où q_1, q_2, q_3 désignent les contributions respectives de chacun.

Ecrivons les conditions de premier ordre : $\dfrac{d}{dq_1}U_A = \dfrac{d}{dq_2}U_I = \dfrac{d}{dq_3}U_N = 0$

$$\text{Soit} \begin{cases} \dfrac{-2q_1 + 100 - q_2 - q_3}{2\sqrt{(100 - q_1)(q_1 + q_2 + q_3)}} & = 0 \\ \dfrac{-2q_2 + 200 - q_1 - q_3}{2\sqrt{(200 - q_2)(q_1 + q_2 + q_3)}} & = 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{q_1 + q_2 + q_3}} - 1 & = 0 \end{cases}$$

$$\text{On obtient alors : } \begin{cases} q_1 = \dfrac{100 - q_2 - q_3}{2} & \text{si } 100 - q_2 - q_3 > 0 \quad \text{et } 0 \text{ sinon} \\ q_2 = \dfrac{200 - q_1 - q_3}{2} & \text{si } 200 - q_1 - q_3 > 0 \quad \text{et } 0 \text{ sinon} \\ q_3 = 1 - q_1 - q_2 & \text{si } 1 - q_1 - q_2 > 0 \quad \text{et } 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Dès lors que la somme des contributions d'Archibald et Irma excède 1, Nestor ne souhaite plus contribuer.

Déterminons donc d'abord l'équilibre de Nash en se plaçant dans le cas de figure où Nestor ne contribue pas et où les seuls contributeurs sont Archibald et Irma.

$$\text{Soit : } \begin{cases} q_1^* = \dfrac{100 - q_2^*}{2} \\ q_2^* = \dfrac{200 - q_1^*}{2} \end{cases}$$

$q_1^* = 0$ et $q_2^* = 100$

La somme de ces deux contributions étant supérieure à 1, Nestor ne contribue effectivement pas.

- Exercice 7 :

(1) Notons b_1 et b_2 les fonctions de meilleure réponse des joueurs 1 et 2 .

$b_1(N) = D$, $b_1(D) = D$, $b_2(N) = D$ et $b_2(D) = D$: $(D\ ;\ D)$ est la solution du jeu, non optimale au sens de Pareto $(0 < 3)$.

La stratégie du joueur 2 est : "Jouer N tant que 1 joue N et si 1 joue D, jouer D jusqu'à la fin du jeu".

Si le joueur 1 joue N il va obtenir un flux continu de gains égaux à 3 jusqu'à la fin des temps. La valeur actualisée (espérée) de ce flux est : $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 3\gamma^k = \dfrac{3}{1-\gamma}$

S'il joue D il obtient 4 maintenant mais mais le joueur 2 met sa menace à exécution et il obtiendra 0 pour le reste des périodes . Il a donc intérêt à coopérer si : $\dfrac{3}{1-\gamma} \geq 4$ soit $\gamma \geq \dfrac{1}{4}$

Jouer N devient pour chaque joueur la solution du jeu si chaque joueur accorde suffisamment d'importance à ses gains futurs ($\gamma \geq \frac{1}{4}$) et $(N\ ;\ N)$ est un équilibre de Nash qui correspond à l'émergence et à la persistance de la coopération .

(2) Si le joueur 1 joue N il va obtenir un flux continu de gains égaux à 3 jusqu'à la fin des temps. La valeur actualisée (espérée) de ce flux est : $3 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} 3\gamma^k = \dfrac{3}{1-\gamma}$

S'il joue D à la deuxième étape, la menace du "tit-for-tat" se met à exécution : le joueur 2 jouera D à l'étape suivante et le joueur 1 N.

On obtient de façon cyclique DN, ND, DN, ND, . . .donnant un paiement moyen actualisé de :

$3+4\gamma-1\gamma^2+4\gamma^3-1\gamma^4...=4+4\gamma+4\gamma^3....-1-1\gamma^2-1\gamma^4....$

$$=4+4\gamma\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^{2k}-\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^{2k}$$

$$=4+(4\gamma-1)\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^{2k}=4+\frac{4\gamma-1}{1-\gamma^2}$$

Le joueur 1 jouera la coopération si $\dfrac{3}{1-\gamma}\geq 4+\dfrac{4\gamma-1}{1-\gamma^2}$

soit $\gamma\geq\frac{1}{4}$.

Si chaque joueur accorde suffisamment d'importance à ses gains futurs ($\gamma\geq\frac{1}{4}$) , (N ; N) est encore sous la menace du "tit-for-tat" un équilibre de Nash.

- Exercice 8 :

a) Supposons que le joueur 1 joue M, $q_1=\dfrac{1}{5}$ et que le joueur 2 joue C, $q_2=\dfrac{1}{4}$

Le prix du marché est alors $P=1-q_1-q_2=\dfrac{11}{20}$

Pour le joueur 1 : $u_1(q_1)=(1-q_1-q_2)q_1-\dfrac{q_1^2}{2}-\dfrac{1}{3200}=\dfrac{11}{20}.\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{50}-\dfrac{1}{3200}=\dfrac{287}{3200}$

Pour le joueur 2 : $u_2(q_2)=(1-q_1-q_2)q_2-\dfrac{q_2^2}{2}-\dfrac{1}{3200}=\dfrac{11}{20}.\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{32}-\dfrac{1}{3200}=\dfrac{339}{3200}$

b) Pour plus de lisibilité (et sans que cela ne change le résultat final) on notera 319 au lieu de $\dfrac{319}{3200}$...

Joueur 2

		D	C
Joueur 1	D	319; 319	287; 339
	C	339; 287	299; 299

Ce jeu possède un seul équilibre de Nash (C ;C). (Situation similaire au dilemme du prisonnier)

c) En tenant compte du facteur d'actualisation des gains γ, s'il joue infiniment D la valeur actualisée des gains du joueur 1 :

$$U_D=\sum_{i=0}^{\infty}319\gamma^i$$

S'il dévie au temps T, il sera sanctionné par le joueur 2 ("trigger sytrategy") qui met sa menace à exécution et joue éternellement C, l'obligeant lui même à jouer C et la valeur actualisée de ses gains devient :

$$U=\sum_{i=0}^{T-1}319\ \gamma^i+339\gamma^T+\sum_{i=T+1}^{\infty}299\ \gamma^i$$

Le joueur 1 n'aura pas intérêt à dévier si et seulement si :

$U_D\geq U$ soit $\displaystyle\sum_{i=T}^{\infty}319\ \gamma^i\geq 339\gamma^T+\sum_{i=T+1}^{\infty}299\ \gamma^i$ (la première partie du calcul est identique)

$\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}319\ \gamma^i\geq 339+\gamma\sum_{i=0}^{\infty}299\ \gamma^i$ (on factorise puis simplifie par γ^T)

$$319\frac{1}{1-\gamma}\geq 339+299\frac{\gamma}{1-\gamma}$$

$$319\geq 339(1-\gamma)+299\gamma$$

$$\gamma\geq\frac{339-319}{339-229}=0.5$$

Si le joueur 1 accorde suffisamment d'importance à ses revenus futurs ($\gamma\geq 0.5$) il ne déviera pas de la stratégie dite du cartel (D,D), et la situation est évidemment valable pour la firme 2.

L'équilibre de Nash que l'on obtient correspond à l'idée assez naturelle que sous la menace de sanctions peut émerger et persister une coopération.

ANNEXE 1 : Rappel des exercices de référence.

• Le modèle de duopole (concurrence imparfaite) de Cournot

Le duopole est : «un marché qui est servi par deux producteurs et sur lequel les demandes proviennent de nombreux agents qui sont individuellement petits. La théorie économique représente cette situation sous l'hypothèse que le même prix s'appliquera aux échanges de toutes les unités du bien considéré et que la demande est concurrentielle dans le sens suivant : la quantité totale vendue dépend du prix du bien et de rien d'autre ».

Dans le cadre de ce modèle, les deux firmes 1 et 2 choisissent simultanément leur quantité q_1 et q_2, l'offre totale du marché est donc $Q = q_1 + q_2$.

Le prix de marché p est une fonction décroissante de la quantité totale offerte, soit $p = p(Q)$ avec $p'(Q) < 0$. La fonction $p(Q)$ est appelée fonction de demande inverse.

Chaque firme supporte un coût de production c_i en fonction de la quantité produite, soit $c_i = c_i(q_i)$ et le profit de la firme i est donc :

$u_i(q_i, q_{-i}) = q_i.p - c_i = q_i.p(q_1 + q_2) - c_i(q_i)$

L'équilibre de Cournot suppose que chacune des deux firmes maximise son profit étant donné que l'autre firme également prend une décision de production dans l'objectif de maximiser son profit. L'équilibre de Cournot (q_1^*, q_2^*) représente l'équilibre de Nash de ce duopole

Pour la firme 1, la fonction de réaction est $r_1(q_2)$ et est le résultat du programme suivant :

$\max\limits_{q_1} \; u_1(q_1, q_2) = q_1.p(q_1 + q_2) - c_1(q_1)$

u_1 étant dérivable , la condition du premier ordre implique que q_1^* est déterminé par l'équation suivante :

$$\frac{d}{dq_1}u_1(q_1, q_2) = p(q_1^* + q_2) + q_1^*.\frac{d}{dq_1}p(q_1^* + q_2) - \frac{d}{dq_1}c_1(q_1^*) = 0$$

Même calcul pour la firme 2 et ainsi l'équilibre de Nash ($q_1^* = r_1(q_2^*)$ et $q_2^* = r_2(q_1^*)$) est caractérisé par les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} p(q_1^* + q_2^*) + q_1^*.\dfrac{d}{dq_1}p(q_1^* + q_2^*) - \dfrac{d}{dq_1}c_1(q_1^*) & = 0 \\ p(q_1^* + q_2^*) + q_2^*.\dfrac{d}{dq_2}p(q_1^* + q_2^*) - \dfrac{d}{dq_2}c_2(q_2^*) & = 0 \end{cases}$$

Dans l'une des versions les plus simples de ce modèle, on considère que la fonction de demande inverse et la fonction de coût sont linéaires, soit :

$p(q_1 + q_2) = a - b(q_1 + q_2)$, avec $b > 0$ et $c_i(q_i) = c\, q_i$ avec $0 \leq c \leq a$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} a - 2bq_1^* - bq_2 - c & = 0 \\ a - 2bq_2^* - bq_1 - c & = 0 \end{cases}$$

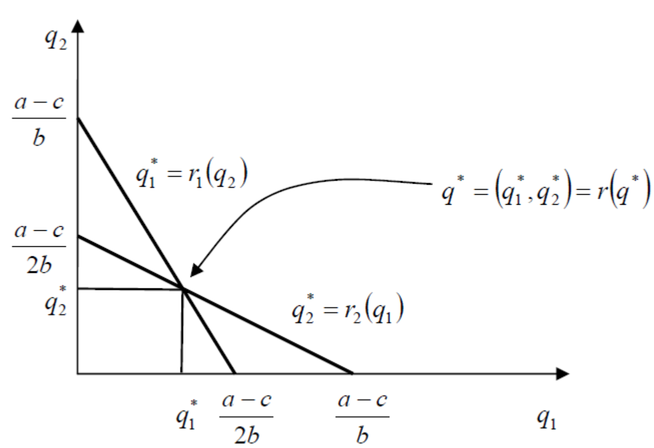
Les fonctions de meilleure réaction de Cournot des firmes 1 et 2 prennent alors la forme :

$$q_1^* = r_1(q_2) = \frac{a - bq_2 - c}{2b}$$

$$q_2^* = r_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$$

L'équilibre de Nash (de Cournot) obtenu après résolution de ces deux équations est : $q_1^* = q_2^* = \dfrac{a - c}{3b}$

La recherche de l'équilibre de Cournot peut se faire à l'aide d'une résolution graphique en représentant dans des coordonnées cartésiennes les fonctions de meilleure réponse des firme 1 et 2 , $r_1(q_2) = \dfrac{a - bq_2 - c}{2b}$ et $r_2(q_1) = \dfrac{a - bq_1 - c}{2b}$:



A cet équilibre, la quantité totale offerte est $\dfrac{2(a - c)}{3b}$ et le prix de marché est : $p(q_1+q_2) = a - b\dfrac{2(a - c)}{3b} = \dfrac{1}{3}a + \dfrac{2}{3}c > c$ car $a > c$.

En d'autres termes, l'équilibre de Cournot est tel que le prix de marché est plus grand que le coût marginal.

• Le modèle de duopole de Bertrand

Dans le modèle de Bertrand, la variable de décision des firmes est le prix de vente et non la quantité à produire, dans ce modèle, il existe deux firmes $i = 1, 2$ produisant un bien partiellement substituables. Le coût unitaire de production, supposé constant et identique pour les deux firmes, est égal à c.

Chaque firme i choisit un prix de vente p_i et les quantités demandées adressées aux deux firmes 1 et 2 sont respectivement $q_1(p_1, p_2) = a - bp_1 + dp_2$ et $q_2(p_1, p_2) = a - bp_2 + dp_1$ avec $b > d >$. Cette fonction de demande exprime l'idée selon laquelle la quantité demandée à une firme est négativement influencée par l'augmentation du prix proposé par cette firme et positivement influencée par l'augmentation du prix proposé par l'autre firme. De plus, le premier effet marginal est supérieur au second effet marginal.

Toutes ces données sont connaissance commune et les firmes prennent leur décision de prix de façon simultanée.

L'objectif de chaque firme est la maximisation de son profit. Pour la firme 1, on a donc :

$\max_{p_1} \; u_1(p_1, p_2) = (p_1 - c)(a - bp_1 + dp_2)$

La condition du premier ordre est :$\dfrac{d}{dp_1}u_1(p_1, p_2) = a - 2bp_1 + dp_2 + bc = 0$

Ceci permet d'obtenir la fonction de meilleure réponse $p_1^*(p_2)$ de la firme 1 : $p_1^*(p_2) = \dfrac{a + dp_2 + bc}{2b}$

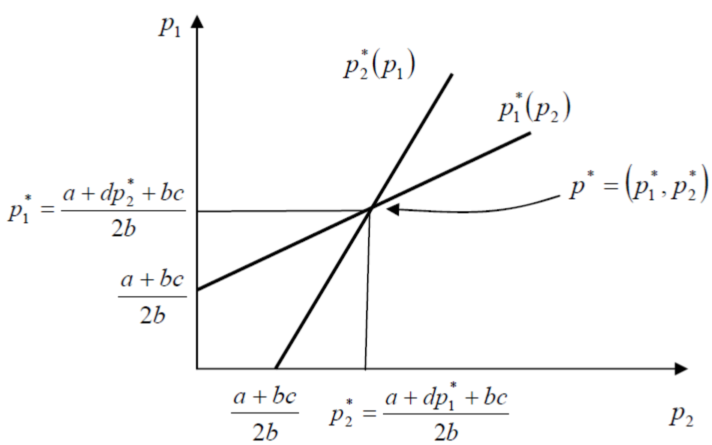
La même démarche appliquée à la firme 2 permet d'obtenir la fonction de meilleure réponse $p_2^*(p_1)$ de la firme 2 :$p_2^*(p_1)\dfrac{a + dp_1 + bc}{2b} =$

L'équilibre de Bertrand est la solution du système de deux équations suivantes :

$$\begin{cases} p_1^*(p_2) & \dfrac{a + dp_2^* + bc}{2b} \\ p_2^*(p_1) & = \dfrac{a + dp_1^* + bc}{2b} \end{cases}$$

Soit $(p_1^*, p_2^*) = (\dfrac{a + bc}{2b - d}, \dfrac{a + bc}{2b - d})$

Le schéma ci-dessous est la représentation graphique de l'équilibre de Bertrand - Nash.



• Le modèle de duopole de Stackelberg

Le modèle de duopole de Stackelberg (1934) est un exemple de jeu dynamique à information complète et parfaite.

On considère un marché où existent deux firmes. L'une (la firme 1) est le leader et l'autre (la firme 2) est le follower. La décision à prendre pour chaque firme porte sur la quantité à produire.

Par rapport au modèle de Cournot où les quantités sont choisies simultanément par les deux firmes, dans le modèle de Stackelberg, les quantités sont choisies de façon séquentielle. Le déroulement du jeu est donc le suivant :

- La firme 1 choisit une quantité q_1

. - La firme 2 observe q_1 et choisit une quantité q_2 .

Comme dans le modèle de Cournot :

On considère que le coût unitaire de production c, est constant.

La quantité totale offerte par les deux firmes est $Q = q_1 + q_2$

$P(Q)$ est la fonction de demande inverse donnant le prix d'équilibre du marché en fonction de la quantité totale offerte par les deux firmes, on considère que cette fonction prend la forme linéaire $P(Q) = a - b(q_1 + q_2)$ avec $a \geq c$.

La résolution du jeu par la méthode de Récurrence vers l'amont (Backwards Induction) commence par la détermination du choix optimal de la firme 2.

$\max_{q_2} \ u_2(q_1, q_2) = q_2(a - b(q_1 + q_2)) - c(q_2)$

La condition nécessaire et suffisante est :

$\frac{d}{dq_2} u_2 = a - bq_1 - 2bq_2 - c = 0$

Soit $q_2^* = mr_2(q_1) = \frac{a - bq_1 - c}{2b}$ (Comme dans le "Cournot" classique , voir p6)

Etant donnée l'hypothèse d'information complète (chaque firme connaît la fonction de paiement de l'autre), la firme 1 peut anticiper la meilleure réponse $mr_2(q_1)$ de la firme 2. La quantité q_1^* est donc la solution du programme suivant :

$\max_{q_1} \ u_1(q_1, q_2^*) = q_1(a - b(q_1 + q_2^*)) - c(q_1) = q_1(a - b(q_1 + \frac{a - bq_1 - c}{2b})) - c(q_1) = q_1 \frac{a - bq_1 - c}{2}$

La condition nécessaire et suffisante est donc :

$\frac{d}{dq_1} u_1 = \frac{a - 2bq_1 - c}{2} = 0$

Soit $q_1^* = mr_1(q_2) = \frac{a - c}{2b}$ et donc $q_2^* = mr_2(q_1^*) = \frac{a - bq_1^* - c}{2b} = \frac{a - c}{4b}$

La solution du modèle de duopole de Stackelberg est donc $(q_1^*, q_2^*) = (\frac{a - c}{2b}, \frac{a - c}{4b})$

En comparant par rapport au résultat du modèle de Cournot, on peut remarquer que la quantité choisie par le leader q_1^* est supérieure à la quantité choisie par chaque firme en situation de choix simultanés $\frac{a - c}{3b}$, elle-même supérieure à la quantité choisie par le follower $\frac{a - c}{4b}$.

La quantité totale produite dans le choix séquentiel, $Q^* = q_1^* + q_2^* = \frac{3(a - c)}{4b}$ est supérieure à celle produite en situation de choix simultanés, $\frac{2(a - c)}{4b}$

Comme conséquence, le prix de marché dans le modèle de Stackelberg est inférieur au prix de marché correspondant au modèle de Cournot. Il en résulte que par rapport à la situation de choix simultanés, le follower obtient un profit inférieur.

- Duopole de Cournot avec asymétrie de l'information

Un autre exemple d'asymétrie partielle en considérant dans le modèle du duopole de Cournot que la firme 1 a une incertitude quant au coût marginal c_2 de la firme 2, celui-ci peut être égal à c_H (coût élevé) ou c_L (coût faible) avec respectivement les probabilités α et $(1 - \alpha)$.

On choisit ici la fonction de demande inverse donnant le prix d'équilibre du marché $P(Q) = a - (q_1 + q_2)$.

Pour la firme 1, la firme 2 peut donc avoir l'une des deux différentes fonctions de paiement (profit) possibles, soit :

$u_2(q_1, q_2; c_H) = q_2(a - (q_1 + q_2)) - c_H(q_2)$ ou $u_2(q_1, q_2; c_L) = q_2(a - (q_1 + q_2)) - c_L(q_2)$

la firme 2 n'a aucune incertitude quand à c_1, par conséquence, pour la firme 2, la fonction de paiement de la firme 1 demeure inchangée, soit :

$u_1(q_1, q_2; c_1) = q_1(a - (q_1 + q_2)) - c_1(q_1)$

Posons $t_1 = a - c_1 = 1$ (aucune incertitude relative au coût c_1 de la firme 1).

Par contre la valeur $t_2 = a - c_2$ n'est pas certaine pour la firme 1 qui ne dispose que des croyances a posteriori suivantes :

$P(t_2 = \frac{3}{4}) = \frac{1}{2}$ et $P(t_2 = \frac{5}{4}) = \frac{1}{2}$

$t_2 = \frac{3}{4}$ correspond au type c_H, coût élevé et $t_2 = \frac{5}{4}$ correspond au type c_H, coût faible.

La firme 2 choisit une quantité optimale en fonction de son type

$\max_{q_2} \ u_2(q_1, q_2) = q_2(t_2 - (q_1 + q_2))$

La condition nécessaire et suffisante est :

$\frac{d}{dq_2} u_2 = 0$, soit $q_2^* = \frac{t_2 - q_1}{2}$

On a donc $q_2^{H^*} = \frac{\frac{3}{4} - q_1}{2}$ et $q_2^{L^*} = \frac{\frac{5}{4} - q_1}{2}$

La firme 1 choisit la quantité optimale q_1^* en fonction de ses croyances sur la valeur de t_2, c'est à dire celle qui maximise son espérance de profit, soit :

$\max_{q_1} \ u_1(q_1, q_2) = \frac{1}{2}(q_1(1 - (q_1 + q_2^H))) + \frac{1}{2}(q_1(1 - (q_1 + q_2^L)))$

La condition nécessaire et suffisante est :

$q_1^* = \frac{2 - (q_2^H + q_2^L)}{4}$

L'équilibre de Nash bayésien du jeu s'obtient par la combinaison des trois conditions d'équilibre, soit :

$$q_1^* = \frac{2-(q_2^{H^*}+q_2^{L^*})}{4} = \frac{2-(\frac{\frac{3}{4}-q*_1}{2}+\frac{\frac{5}{4}-q_1^*}{2})}{4}$$

soit $q_1^* = \dfrac{1}{3}$ et donc $q_2^{H^*} = \dfrac{\frac{3}{4}-\dfrac{1}{3}}{2} = \dfrac{5}{24}$ et $q_2^{L^*} = \dfrac{\frac{5}{4}-\dfrac{1}{3}}{2} = \dfrac{11}{24}$

ANNEXE 2 : Actualisation d'un flux de gains

Le temps intervient de manière cruciale dans un jeu répété. En effet, les répétitions du jeu génèrent un flux d'utilités (gains) pour chaque joueur. À chaque moment du temps où un joueur doit faire un choix, il doit pouvoir évaluer les conséquences de ce choix dans la suite du jeu. Or les joueurs accorderont de l'importance à la date à laquelle ils obtiennent les différents gains : un euro obtenu aujourd'hui n'aura pas la même valeur aux yeux d'un joueur qu'un euro qui ne sera obtenu que demain. Quand le joueur doit arbitrer entre ces deux possibilités, il doit pouvoir les comparer. Cette comparaison se fait par le biais de l'actualisation.

On peut observer la préférence de l'agent entre aujourd'hui et demain en lui demandant de nous indiquer le gain futur minimal, x_{t+1}, qu'il acceptera d'échanger contre un gain x_t, aujourd'hui. On appelle alors $\gamma = \frac{x_t}{x_{t+1}}$ le facteur d'actualisation de l'agent. x_t, est alors la valeur actualisée d'une période de x_{t+1}.

$x_t = VA_t(x_{t+1}) = \gamma x_{t+1}$.

On peut alors utiliser le facteur d'actualisation de l'agent pour comparer des revenus à des différentes dates ou pour faire voyager les gains dans le temps.

Étant donné son facteur d'actualisation γ, l'agent économique sera indifférent entre obtenir x dans t périodes et obtenir $\gamma^t x$ aujourd'hui.

En économie, l'hypothèse standard concernant la relation au temps est la préférence pour le présent : on suppose en général que les agents préfèrent, toutes choses égales par ailleurs, les revenus actuels aux revenus futurs. Cette hypothèse correspond alors à $\gamma < 1$.

Si le joueur du jeu répété obtient un flux infini de gains $u_i(t)$, la valeur actualisée au début du jeu de ce flux est donnée par

$$\sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k u_i(t)$$

Si $u_i(t) = u$, pour tout t alors cette valeur actualisée devient :

$$u \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k = \frac{1}{1-\gamma} u$$